۱●- در ۱۰ آگوست سال ۱۹۷۲ میلادی (۱۹ مرداد سال ۱۳۵۱)، شهاب سنگ بزرگی ردی در آسمان غرب آمریکا و کانادا بر جای گذاشت که بسیار شبیه به ردی بود که یک سنگ به هنگام برخورد با آب برجای می‌گذارد. گوی آتشین همراه آن به حدی فروزان بود که می‌شد آن را در آسمان روز مشاهده کرد و از دنبالهٔ معمول یک شهاب سنگ درخشانتر بود. جرم شهاب سنگ در حدود 4×10^{6} kg و تندی آن در حدود 15km/s بود. با فرض آنکه چنین شهاب سنگی به طور قائم وارد جو شود، تقریباً با همین تندی با سطح زمین برخورد می‌کند. (الف) اتلاف انرژی جنبشی شهاب سنگ را (برحسب ژول) به هنگام برخورد قائم با زمین محاسبه کنید. (ب) این انرژی را برحسب مضربی از انرژی یک مگاتُن TNT که 4.2×10^{15} J است، بیان کنید. (پ) انرژی مربوط به انفجار بمب اتمی هیروشیما معادل ۱۳ کیلوتن TNT بود. برخورد شهاب سنگ با زمین معادل با انفجار چند بمب هیروشیماست؟

حل: (الف)

$$Q=\Delta K=K_f-K_i=0-\frac{1}{2}mv_i^2=-\frac{1}{2}\times4\times10^{6}\times(15\times10^{3})^2$$

$$Q=-4.5\times10^{14}\ \text{J}$$

(ب) بر انرژی یک مگاتن TNT تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{|\Delta K|}{4.2\times10^{15}}=\frac{4.5\times10^{14}}{4.2\times10^{15}}=0.107\ \text{MegatonTNT}$$

(پ)

$$\frac{0.107\times10^{6}\ \text{TNT}}{13\times10^{3}\ \text{NTT}}=8.2307$$

معادل ۸ بمب

۲●- اگر جرم موشک *ساترن* V[1] با فضاپیمای *آپولو*[2] متصل به آن مجموعاً 2.9×10^{5} kg باشد و به تندی 11.2km/s رسیده باشند، آنگاه انرژی جنبشی آنها چقدر است؟

حل:

$$k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\times2.9\times10^{5}\,(11.2\times10^{3})^2$$

$$=1.819\times10^{13}\ \text{J}$$

۳●- پروتونی (به جرم $m=1.67\times10^{-27}$kg) در امتداد یک خط مستقیم در شتابدهنده‌ای تا $3.6\times10^{15}\text{m/s}^2$ شتابدار شده است. اگر تندی اولیهٔ پروتون 2.4×10^{7} m/s باشد و 3.5cm را طی کند، (الف) تندی و (ب) افزایش در انرژی جنبشی آن چقدر است؟ SSM

حل: (الف) ابتدا سرعت را می‌یابیم

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x$$

$$v^2=v_0^2+2a\Delta x\Rightarrow v=\sqrt{v_0^2+2a\Delta x}$$

$$v=\sqrt{(2.4\times10^{7})^2+2\times3.6\times10^{15}\times3.5\times10^{-2}}$$

$$=2.88\times10^{7}\ \text{m/s}$$

1. Saturn V
2. Apollo

(ب)

$$\Delta K=K_f-K_i$$

$$K_i=\frac{1}{2}mv_i^2=\frac{1}{2}(1.67\times10^{-27}\ \text{kg})(2.7\times10^{7}\ \text{m/s})^2$$

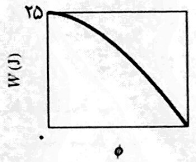
$$=4.8\times10^{-13}\ \text{J}$$

$$K_f=\frac{1}{2}mv_f^2=\frac{1}{2}(1.67\times10^{-27}\ \text{kg})(2.88\times10^{7}\ \text{m/s})^2$$

$$=6.9\times10^{-13}\ \text{J}$$

$$\Delta K=2.12\times10^{-13}\ \text{J}$$

۴●- بر مهره‌ای که در امتداد یک سیم مستقیم +5.0cm جابه‌جایی یافته است، نیروی $\vec{F}_a$ وارد شده است. بزرگی $\vec{F}_a$ در مقدار معینی ثابت می‌شود، ولی زاویهٔ ϕ میان $\vec{F}_a$ و جابه‌جایی مهره را می‌توان انتخاب کرد. شکل ۷-۲۴ کار W انجام شده توسط $\vec{F}_a$ روی مهره را برای گستره‌ای از مقدارهای ϕ به دست می‌دهد. اگر ϕ (الف) ۶۴° و (ب) ۱۴۷° باشد، چقدر کار توسط $\vec{F}_a$ انجام شده است؟ ۲۵



شکل ۷-۲۴ مسئلهٔ ۴

حل: ابتدا از روی شکل، مقدار نیرو را می‌یابیم

$$W=\vec{F}_a\cdot\vec{d}=F_a d\cos\phi$$

$$F_a=\frac{W}{d\cos\phi}\Rightarrow F_a=\frac{25}{5\times10^{-2}\cos(0)}=5\times10^{2}\ \text{N}$$

(الف) کار را محاسبه می‌کنیم برای ۶۰° داریم.

$$W=F_a d\cos\phi$$

$$W=F_a d\cos\phi\Rightarrow W=5\times10^{2}\times5\times10^{-2}\cos(64°)=10.96\ \text{J}$$

(ب) برای ۱۴۷° داریم:

$$W=F_a d\cos\phi\Rightarrow W=5\times10^{2}\times5\times10^{-2}\cos(147°)$$

$$=-20.17\ \text{J}$$

۵●●- انرژی جنبشی پدری که با پسرش مسابقه دو می‌دهد نصف انرژی جنبشی پسرش است و پسر نصف پدر جرم دارد. وقتی که پدر بر تندی خود به میزان 1.0m/s می‌افزاید، همان انرژی جنبشی پسر را دارد. تندیهای اولیهٔ (الف) پدر و (ب) پسر چقدر بوده است؟

حل: (الف) $K_F=\frac{1}{2}K_b$ $\qquad m_b=\frac{1}{2}m_F$

از نسبت میان انرژی‌های جنبشی، نسبت سرعت‌های اولیه را می‌یابیم. اندیس b مربوط به پسر و F مربوط به پدر است.

$$\frac{K_F}{K_b}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{\frac{1}{2}m_F}{\frac{1}{2}m_b}\left(\frac{v_F}{v_b}\right)^2=\frac{1}{2}$$

$$2\left(\frac{v_F}{v_b}\right)^2=\frac{1}{2}\Rightarrow\left(\frac{v_F}{v_b}\right)^2=\frac{1}{4}\Rightarrow v_F=\frac{1}{2}v_b$$

با جایگذاری نسبت سرعت‌های بدست آمده در روابط، می‌توانیم تندی‌های پدر و پسر را بیابیم.

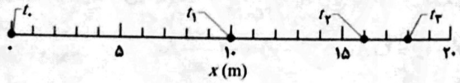
$$\frac{1}{2}m_F[(v_F+1)]^2=\frac{1}{2}m_b(v_b)^2$$

$$2m_b\left[\left(\frac{1}{2}v_b+1\right)\right]^2=m_b v_b^2$$

$$v_b^2-4v_b-4=0\Rightarrow v_b=4.8\ \text{m/s}$$

$$v_F=\frac{1}{2}\cdot4.8\text{m/s}=2.4\text{m/s}$$

۶●●- مهره‌ای به جرم 1.8×10^{-2} kg در امتداد سیمی واقع در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند. وقتی مهره در لحظهٔ $t=0$ با تندی 12 m/s از $x=0$ شروع به حرکت کند، نیروی ثابتی بر مهره وارد می‌شود. شکل ۷-۲۵ مکان مهره را در زمانهای $t=0, 1.0, 2.0, 3.0$s نشان می‌دهد. مهره در $t=3.0$ s به سکون لحظه‌ای می‌رسد. انرژی جنبشی مهره در $t=10$ s چیست؟



شکل ۷-۲۵ مسئلهٔ ۶

حل: ابتدا شتاب را می‌یابیم و از طریق آن سرعت را محاسبه می‌کنیم

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow18=\frac{1}{2}a(3)^2+12(3)$$

$$\Rightarrow\frac{9}{2}a=-18\Rightarrow a=-4\text{m/s}^2$$

$$v=at+v_0\Rightarrow v=-4\times10+12=-28\ \text{m/s}$$

$$K=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}(1.8\times10^{-2})(-28)^2=7.036\ \text{J}$$

۷●- تحت تأثیر تک نیرویی به بزرگی 5.0 N، یک قوطی به جرم 2.0kg در صفحهٔ xy حرکت می‌کند. قوطی در ابتدا سرعت 4.0m/s در جهت مثبت محور x و چند لحظه بعد سرعت 6.0m/s در جهت مثبت محور y دارد. در این مدت، نیروی 5.0 N چقدر کار روی قوطی انجام داده است؟

حل: توجه داریم که انرژی جنبشی به تندی‌ها بستگی دارد. پس طبق قضیهٔ کار- انرژی جنبشی:

$$W=\Delta K=\frac{1}{2}mv_f^2-\frac{1}{2}mv_i^2=\frac{1}{2}\times2\times(36-16)=20\ \text{J}$$

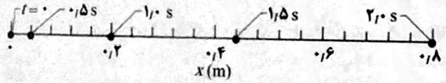
۸●- سکه‌ای تحت تأثیر نیروی ثابتی از نقطه‌ای واقع بر مبداء یک دستگاه مختصات xy به نقطه‌ای به مختصات (3.0m, 4.0m) روی صفحهٔ بدون اصطکاکی می‌لغزد. بزرگی نیرو 2.0N و جهت آن 100° پادساعتگرد نسبت به جهت مثبت محور x است. در طی این جابه‌جایی چقدر کار توسط نیرو انجام شده است؟

حل: از تعریف کار داریم:

$$W=\vec{F}\cdot\vec{d}=F_x\Delta x+F_y\Delta y=F\cos(100°)\Delta x+F\sin(100°)\Delta y$$

$$W=2\times\cos(100°)\times3+2\times\sin(100°)\times4=6.83\ \text{J}$$

۹●●- بر جسمی به جرم 3.0 kg که روی تخت هوای افقی بدون اصطکاکی ساکن است، نیروی افقی ثابت $\vec{F}$ در جهت مثبت محور x در امتداد تخت هوا وارد می‌شود. نمودار استروبوسکپی مکان جسم در هنگامی که به سمت راست می‌لغزد در شکل ۷-۲۶ نشان داده شده است. نیروی $\vec{F}$ در زمان $t=0$ بر جسم وارد شده است و این نمودار، مکان جسم را در بازه‌های زمانی 0.50s ثبت کرده است. در بازهٔ زمانی $t=0$ تا $t=2.0$s، نیروی $\vec{F}$ چقدر کار روی جسم انجام داده است؟



شکل ۷-۲۶ مسئلهٔ ۹

حل: ابتدا شتاب را می‌یابیم. با استفاده از شتاب سرعت را محاسبه می‌کنیم و انرژی جنبشی را می‌یابیم

$$W=\Delta K=\frac{1}{2}mv_f^2-\frac{1}{2}mv_i^2$$

$$x=\frac{1}{2}at^2\Rightarrow a=\frac{2\times0.8}{(2)^2}=0.4\text{m/s}^2$$

$$v_f=at=0.4\times2=0.8\ \text{m/s}$$

$$W=\Delta K=\frac{1}{2}mv_f^2-0$$

$$W=\frac{1}{2}\times3\times0.64=0.96\ \text{J}$$

۱۰●- قالب یخی که در آب شناور است تحت تأثیر نیروی $\vec{F}=(210\ \text{N})\hat{i}-(150\ \text{N})\hat{j}$ که از سوی جریان آب به آن وارد شده است، جابه‌جایی $\vec{d}=(15\text{m})\hat{i}-(12\text{m})\hat{j}$ را انجام می‌دهد. نیروی جریان آب در طی این جابه‌جایی چقدر کار روی قطعه انجام می‌دهد؟

حل: از تعریف کار برای محاسبه استفاده می‌کنیم:

$$W=\vec{F}\cdot\vec{d}=F_x\Delta x+F_y\Delta y=(210)(15)+(-150)(-12)$$

$$=4950\ \text{J}$$

۱۱●●- یک سورتمهٔ مسابقه و سرنشین آن که جرم کل آنها 85kg است با تندی اولیهٔ 37m/s از یک سراشیبی پایین

می‌آید و وارد یک مسیر مستقیم افقی می‌شود. اگر نیرویی با آهنگ $2.0\,m/s^2$ حرکت آنها را تا لحظهٔ توقف آهسته کند (الف) بزرگی F مورد نیاز چقدر است؟ (ب) فاصلهٔ d که آنها در حین آهسته شدن طی می‌کنند چقدر است؟ (پ) نیرو چه کار W روی آنها انجام می‌دهد؟ اگر حرکت آنها با شتاب $4.0\,m/s^2$ آهسته شود، آنگاه (ت) F، (ث) d و (ج) W چقدرند؟

حل: (الف) از قانون نیوتون داریم:

$F = ma = 85\times 2 = 170\,N$

(ب) $v^2 - v_0^2 = 2ad \Rightarrow d = \frac{-v_0^2}{2a} = \frac{-1369}{2(-2)} = 342.25\,m$

(پ) طبق قضیه‌ی کار انرژی جنبشی داریم:

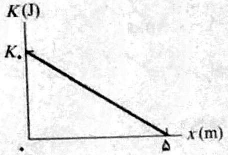
$W = K_f - K_i = -K_i = -\frac{1}{2}mv_i^2 = -\frac{1}{2}\times 85\times(37)^2 = -5.8\times10^4\,J$

(ت) $F = ma = 85\times 4 = 340\,N$

(ث) $d = \frac{-v_0^2}{2a} = \frac{-1369}{2\times(-4)} = 171.125\,m$

(ج) $W = \Delta K = K_f - K_i = -K_i = -\frac{1}{2}\times 85(37)^2 = -5.8\times10^4\,J$

۱۲●●- جسمی به جرم $8.0\,kg$ در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند. وقتی جسم از $x=0$ می‌گذرد، نیروی ثابتی در امتداد محور x شروع به تأثیر روی آن می‌کند. شکل ۷-۲۷ انرژی جنبشی K جسم را برحسب مکان آن هنگامی که از $x=0$ به $x=5.0\,m$ می‌رود نشان می‌دهد. $K_0 = 30.0\,J$ است. نیرو به طور پیوسته بر جسم وارد می‌شود. وقتی جسم رو به عقب حرکت کند، تندی v آن در $x=-3.0\,m$ چقدر است؟



شکل ۷-۲۷ مسئلهٔ ۱۲

حل: ابتدا شتاب حرکت را با رابطهٔ مستقل از زمان می‌یابیم

$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = ma\Delta x$

$a = \frac{K-K_0}{m\Delta x} = \frac{-K_0}{m\Delta x} = -\frac{30}{8\times5} = -0.75\,m/s^2$

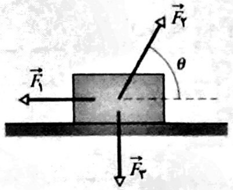
اکنون جابه‌جایی را از $x=5\,m$ لحاظ می‌کنیم:

$\Delta x = (-3-5)\,m$

$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$

$v = \sqrt{2\times(0.75)(-3-5)} = \sqrt{12}\,m/s = 3.46\,m/s$

۱۳●●- شکل ۷-۲۸ سه نیروی وارد شده بر یک جعبهٔ بزرگ را نشان می‌دهد که جعبه را $3.00\,m$ روی کف بدون اصطکاکی به سمت چپ حرکت می‌دهند. بزرگی نیروها عبارت‌اند از $F_1 = 5.00\,N$، $F_2 = 9.00\,N$، و $F_3 = 3.00\,N$، و زاویهٔ نشان داده شده در شکل $\theta = 60.0°$ است. در طی جابه‌جایی (الف) کار خالص انجام شده روی جعبه توسط این سه نیرو چقدر است؟ و (ب) آیا انرژی جنبشی جعبه افزایش می‌یابد یا کاهش؟ GO



شکل ۷-۲۸ مسئلهٔ ۱۳

حل: (الف) برآیند نیروهای افقی را می‌یابیم:

$\sum F_x = F_2\cos\theta - F_1 = 9\times\frac{1}{2} - 5 = -0.5\,N$

شتاب افقی را محاسبه می‌کنیم:

$\sum F_x = ma_x \Rightarrow a_x = \frac{F_x}{m} = -\frac{0.5}{m}$

سرعت نهایی را می‌یابیم

$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow v^2 - v_0^2 = -2\frac{0.5}{m}\Delta x$

$\frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = -0.5\Delta x$

$K - K_0 = -0.5\Delta x$

$K_0 = 0$

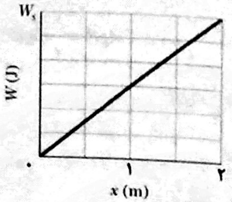
از قضیهٔ کار انرژی جنبشی داریم

$W = K = -0.5(-3) = 1.5\,J$

چون نیروهای عمودی بر جابه‌جایی قائم هستند، کاری انجام نمی‌دهند.

(ب) افزایش می‌یابد.

۱۴●●- یک قوطی پیچ و مهره در امتداد محور x توسط زمین شویی روی کف روغنی (بدون اصطکاک) یک تعمیرگاه اتومبیل هل داده می‌شود. شکل ۷-۲۹ کار W انجام شده روی قوطی توسط نیروی ثابت افقی ناشی از زمین شوی را برحسب مکان x قوطی نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم شکل با $W_s = 6.0\,J$ مشخص شده است. (الف) بزرگی این نیرو چقدر است؟ (ب) اگر انرژی جنبشی اولیهٔ قوطی $3.00\,J$ بوده باشد، انرژی جنبشی آن پس از پیمودن $2.00\,m$ در جهت مثبت محور x چقدر است؟



شکل ۷-۲۹ مسئلهٔ ۱۴

حل: (الف)

$W = Fd \Rightarrow F = \frac{W}{d} = \frac{6J}{2m} = 3\,N$

(ب) طبق قضیهٔ کار انرژی جنبشی داریم

$W = K - K_0 = F\Delta x$

$K = F\Delta x + K_0 = 3\times2 + 3 = 9\,J$

۱۵●●- یک نیروی ۱۲/۰ نیوتونی با سمتگیری ثابت روی ذره‌ای کار انجام می‌دهد به گونه‌ای که ذره جابه‌جایی $\vec{d} = (2.00\hat{i} - 4.00\hat{j} + 3.00\hat{k})\,m$ را پیدا می‌کند. زاویهٔ میان نیرو و جابه‌جایی در صورتی که تغییر انرژی جنبشی ذره (الف) $+30.0\,J$ و (ب) $-30.0\,J$ باشد، چقدر است؟

حل: از تعریف کار و تعریف ضرب داخلی استفاده می‌کنیم:

$W = \vec{F}\cdot\vec{d} = |F d|\cos\theta$

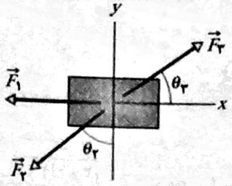
(الف) $\cos\theta = \frac{\vec{F}\cdot\vec{d}}{|\vec{F}\vec{d}|} = \frac{3}{12\times\sqrt{29}} = \frac{1}{21.54}$

$\theta = 62.34°$

(ب) $\cos\theta = \frac{\vec{F}\cdot\vec{d}}{|\vec{F}||\vec{d}|} = \frac{-3}{12\times\sqrt{29}} = \frac{-1}{21.54}$

$\theta = 117.7°$

۱۶●●- شکل ۷-۳۰، دید از بالای سه نیروی افقی وارد بر یک محمولهٔ بار را نشان می‌دهد. محموله که در ابتدا ساکن بوده است، اکنون روی کف بدون اصطکاکی حرکت می‌کند. بزرگی نیروها عبارت‌اند از $F_1 = 3.00\,N$، $F_2 = 4.00\,N$، و $F_3 = 10.0\,N$، و زاویه‌های نشان داده شده در شکل عبارت‌اند از $\theta_2 = 50.0°$ و $\theta_3 = 35.0°$. کار خالص انجام شده روی محموله توسط این سه نیرو در حین نخستین $4.00\,m$ جابه‌جایی چقدر است؟



شکل ۷-۳۰ مسئلهٔ ۱۶

حل:

$\sum F_x = -3 + 10\cos(35°) - 4\sin(50°) = -3 + 10\times0.82 - 4\times0.77 = 2.12\,N$

$\sum F_y = 10\sin(35°) - 4\cos(50°) = 10\times0.57 - 4\times0.64 = 3.14\,N$

ابتدا برآیند نیروهای افقی و عمودی را می‌یابیم.

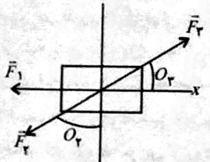
$\sum\vec{F} = (2.12\hat{i} + 3.14\hat{j})\,N$

سپس از تعریف کار استفاده می‌کنیم.

$\left|\sum\vec{F}\right| = \sqrt{4.5 + 9.9} = 3.8\,m/s^2$

توجه داریم جابه‌جایی در جهت نیروی برآیند است.

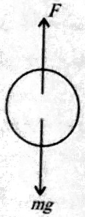
$W = Fd = 3.8\times4 = 15.2\,J$



۱۷●- بالگردی یک فضانورد به جرم $72\,kg$ را توسط کابلی از سطح اقیانوس به طور قائم به بالا به اندازهٔ $15\,m$ بالا می‌کشد. شتاب فضانورد $g/10$ است. چقدر کار روی فضانورد توسط (الف) نیروی وارد از بالگرد و (ب) نیروی گرانشی وارد به او، انجام شده است؟ درست پیش از آنکه او به بالگرد برسد، (پ) انرژی جنبشی و (ت) تندی او چقدر است؟ SSM WWW

حل: از قانون نیوتون برای یافتن نیروی بالاسو استفاده می‌کنیم:

(الف)



$F - mg = \frac{mg}{10} \Rightarrow F = mg\left(1 + \frac{1}{10}\right) = \frac{11}{10}mg$

کار نیروی F را محاسبه می‌کنیم:

$W_F = Fd = \frac{11}{10}mg\times d = \frac{11}{10}72\times9.8\times15 = 1.164\times10^4\,J$

(ب) از تعریف کار داریم: $(\vec{F}_g = m\vec{g})$

$W_g = (m\vec{g})\cdot\vec{d} = -mgd$

$W_g = -72\times9.8\times15 = 1.058\times10^4\,J$

(پ) کارهای نیروهای مختلف را با هم جمع می‌کنیم:

$W_F + W_g = W$ کل کار روی جسم

$W = (1.164 - 1.058)\times10^4\,J = 0.106\times10^4\,J$

از قضیهٔ کار انرژی جنبش داریم:

$\Delta K = K - K_\circ = W \qquad K_\circ = \circ$

$K = W = ۰/۱۰۶ \times ۱۰^{۴}\ \mathrm{J}$

(ت) $\frac{۱}{۲}mv^{۲} = K \Rightarrow v^{۲} = \frac{۲K}{m}$

$v = \sqrt{\frac{۲\times ۰/۱۰۶\times ۱۰^{۴}}{۷۲}} = ۵/۴۲\ \mathrm{m/s}$

●۱۸- (الف) در سال ۱۹۷۵/۱۳۵۴ سقف سالن دوچرخه‌سواری مونترال به وزن ۳۶۰kN به اندازهٔ ۱۰cm بالا برده شد تا مرکز آن تنظیم شود. چقدر کار روی سقف توسط نیروهایی که آن را بالا بردند، انجام شده بود؟ (ب) در سال ۱۹۶۰/۱۳۳۹ مادری از شهر *تامپا*[1] در فلوریدا گزارش داد که او یک سر اتومبیل را که بر اثر شکستن جک روی پسرش افتاده بود، بلند کرده است. اگر او در این بلند کردن اضطراب آمیز به طور مؤثری ۴۰۰۰N (حدود $\frac{۱}{۴}$ وزن اتومبیل) را به اندازهٔ ۵/۰cm بلند کرده باشد، چقدر کار توسط نیروی او روی اتومبیل انجام شده است؟

حل: (الف)

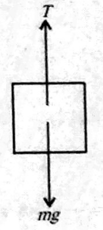
$W = \vec{F}\cdot\vec{d} = mgh = ۳۶۰\times۱۰^{۳}\times۱۰\times۱۰^{-۲} = ۳/۶\times۱۰^{۴}\ \mathrm{J}$

(ب)

$W = \vec{F}\cdot d = mgh = ۴۰۰۰\times۵\times۱۰^{-۲} = ۲۰۰\ \mathrm{J}$

●●۱۹- از ریسمانی برای پایین آوردن قائم قطعه‌ای به جرم M استفاده می‌شود. قطعه که در ابتدا ساکن است با شتاب ثابت رو به پایین $g/۴$ پایین آورده می‌شود. هنگامی که قطعه به اندازهٔ مسافت d پایین آورده شد، مطلوب است (الف) کار انجام شده توسط نیروی ریسمان روی قطعه، (ب) کار انجام شده توسط نیروی گرانشی روی قطعه، (پ) انرژی جنبشی قطعه، و (ت) تندی قطعه. SSM

حل: (الف) ابتدا از قانون نیوتون، نیروی بالاسوی T را می‌یابیم.



$mg - T = \frac{۱}{۴}mg \Rightarrow T = \frac{۳}{۴}mg$

سپس کار نیروی $\vec{T}$ را محاسبه می‌کنیم: $(\theta = \pi)$

$W_T = \vec{T}\cdot\vec{d} = -Td = -\frac{۳}{۴}mgd$

(ب) $W_g = m\vec{g}\cdot\vec{d} = mgd$

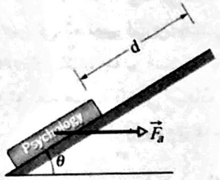
(پ) $W = W_g + W_T = -\frac{۳}{۴}mgd + mgd = \frac{۱}{۴}mgd$

$K = W \Rightarrow K = \frac{۱}{۴}mgd$

(ت) $\frac{۱}{۲}mv^{۲} = \frac{۱}{۴}mgd$

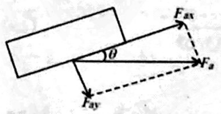
$v^{۲} = \frac{gd}{۲} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{dg}{۲}}$

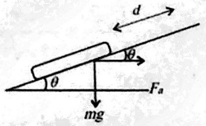
●●۲۰- در شکل ۷-۳۱، نیروی افقی $\vec{F}_a$ به بزرگی ۲۰/۰N به کتابی به جرم ۳/۰۰kg وارد شده است و بر اثر آن، کتاب مسافت رو به بالای $d = ۰/۵۰۰\mathrm{m}$ را روی سطح شیبدار بدون اصطکاکی با زاویهٔ شیب $\theta = ۳۰/۰°$ طی می‌کند. (الف) در حین این جابه‌جایی، کار خالص انجام شده روی کتاب توسط نیروی $\vec{F}_a$، نیروی گرانشی وارد بر کتاب، و نیروی عمودی وارد بر کتاب، چقدر است؟ (ب) اگر انرژی جنبشی کتاب در آغاز این جابه‌جایی برابر با صفر باشد، تندی آن در پایان جابه‌جایی چقدر است؟ GO



شکل ۷-۳۱ مسئلهٔ ۲۰

حل: (الف)





نیرو را در راستای حرکت تصویری کنیم:

$F_{ax} = F_a\cos\theta \qquad F_{ay} = -F_a\sin\theta$

نیروی F_{ay} و نیروی عمودی وارد بر کتاب کار انجام نمی‌دهند. چون بر جابه‌جایی عمود هستند.

$W_{F_a} = \vec{F}_a\cdot\vec{d} = F_a d\cos\theta = ۲۰\frac{۱}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۸/۶۶\ \mathrm{J}$

$W_{mg} = m\vec{g}\cdot\vec{d} = mgd\cos\left(\frac{\pi}{۲}+\theta\right) = -mgd\sin\theta$

$= -۳\times۹/۸\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}$

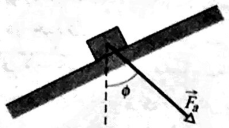
$W_{mg} = -۷/۳۵\ \mathrm{J}$

(ب) $W = W_{mg} + W_{F_a} = ۸/۶۶ - ۷/۳۵ = ۱/۳۱\ \mathrm{J}$

از قضیهٔ کار انرژی جنبشی $(k_\circ = \circ)$ داریم:

$K = W \Rightarrow \frac{۱}{۲}mv^{۲} = W \Rightarrow v = \sqrt{\frac{۲\times۱/۳۱}{۳}} = ۰/۹۴\ \mathrm{m/s}$

●●۲۱- در شکل ۷-۳۲، نیروی ثابت $\vec{F}_a$، به بزرگی ۸۲/۰N بر جعبهٔ کفشی به جرم ۳/۰۰kg در زاویهٔ $\phi = ۵۳/۰°$ وارد شده و بدین ترتیب باعث حرکت رو به بالای جعبه با تندی ثابت روی یک شیب بدون اصطکاک شده است. وقتی جعبه تا مسافت قائم $h = ۰/۱۵۰\mathrm{m}$ حرکت کند، چقدر کار توسط $\vec{F}_a$ روی جعبه انجام شده است؟



شکل ۷-۳۲ مسئلهٔ ۲۱

حل: چون تندی ثابت است داریم:

$W = \Delta K \qquad \Delta K = \circ$

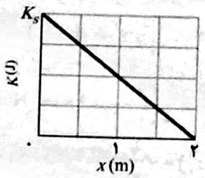
$W = W_{mg} + W_{Fa} = \circ$

$\Rightarrow W_{mg} = -W_{Fa}$

$W_{mg} = m\vec{g}\cdot\vec{d} = -mgh = -۳\times۹/۸\times۰/۱۵ = -۴/۴۱\ \mathrm{J}$

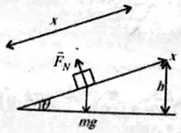
$\Rightarrow W_{Fa} = ۴/۴۱\ \mathrm{J}$

●●۲۲- قطعه‌ای روی سطح شیبدار بدون اصطکاکی به سمت بالا، در امتداد محور x که در این راستا است، حرکت می‌کند. شکل ۷-۳۳ انرژی جنبشی را برحسب تابع مکان x به دست می‌دهد؛ مقیاس محور قائم شکل با $K_s = ۴۰/۰\mathrm{J}$ مشخص شده است. اگر تندی اولیهٔ قطعه برابر ۴/۰۰m/s باشد، نیروی عمودی وارد بر قطعه چقدر است؟



شکل ۷-۳۳ مسئلهٔ ۲۲

حل:



$K = \frac{۱}{۲}mv^{۲}$

$۴۰ = \frac{۱}{۲}\times m(۱۶)$

$\Rightarrow m = ۵\mathrm{kg}$

$F_N = mg\cos\theta$

از تجزیه نیروها داریم:

از قضیهٔ کار انرژی جنبشی داریم:

$W = \Delta K = \circ - K_i = -K_i$

در اینجا فقط نیروی وزن کار انجام می‌دهد. یعنی

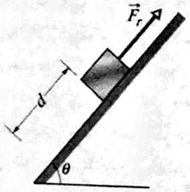
$h = x\sin\theta$

$W = -mgh = -mgx\sin\theta$

$K_i = mgx\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{K_i}{mgx} = \frac{۴۰}{۵\times۹/۸\times۲} = ۰/۴$

$\Rightarrow \cos\theta = ۰/۹ \Rightarrow F_N = ۵\times۹/۸\times۰/۹ = ۴۴/۱\mathrm{N}$

●●۲۳- در شکل ۷-۳۴، وقتی قالب یخی توسط یک طناب نیروی $\vec{F}_r$ به بزرگی ۵۰N و رو به بالای سطح شیبداری با زاویهٔ شیب $\theta = ۵۰°$ وارد شود، قالب یخ رو به پایین بر سطح شیبدار بدون اصطکاک می‌لغزد. وقتی قالب یخ به اندازهٔ مسافت $d = ۰/۵۰\mathrm{m}$ در امتداد شیب بلغزد، انرژی جنبشی آن به اندازهٔ ۸۰J افزایش می‌یابد. اگر طناب به قالب یخ متصل نشده باشد، انرژی جنبشی آن چقدر بیشتر می‌شود؟



شکل ۷-۳۴ مسئلهٔ ۲۳

حل:

$W = W_{F_r} + W_{mg}$

$W_{F_r} = -F_r d$

$W_{mg} = mgd\sin\theta$

زمانی که F_r حذف شود داریم $W = mgd\sin\theta$

$F_r d = ۵۰\times\frac{۱}{۲} = ۲۵$

یعنی انرژی جنبشی نسبت به حالت قبل ۲۵J افزایش می‌یابد.

●●۲۴- یک تیم نجات غارنوردی، غارنورد مجروحی را توسط یک کابل متحرک مستقیماً رو به بالا می‌کشند و او را از گودالی بیرون می‌آورند. بالا آوردن مجروح در سه مرحله صورت می‌پذیرد که در هر مرحله لازم است یک مسافت قائم ۱۰/۰ متری طی شود: (الف) فرد مجروح که در ابتدا ساکن است تا تندی ۵/۰۰m/s شتابدار می‌شود؛ (ب) سپس با تندی ثابت ۵/۰۰m/s بالا برده می‌شود؛ (پ) و سرانجام تندی آن با یک شتاب کاهنده به صفر رسانده می‌شود. در طی هر مرحله، چقدر کار توسط نیروی بالا برنده روی مجروح که جرم او ۸۰/۰kg است انجام شده است؟

حل: (الف) طبق قضیهٔ کار انرژی جنبشی داریم:

$W_{mg} + W_T = \Delta K$

$K = \frac{۱}{۲}mv^{۲} = \frac{۱}{۲}\times۸۰\times۲۵ = ۱۰۰۰\ \mathrm{J}$

کار نیروی وزن:

$W_{mg} = -mgd = -80\times9.8\times10 = -7840\,J$

$1000\,J = -7840\,J + W_T \Rightarrow W_T = 8840\,J$

(ب) چون تندی‌ها ثابت است، پس:

$W_{mg} + W_T = \Delta K = 0$

$W_{mg} = -W_T$

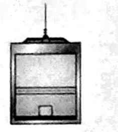
$W_T = +7840\,J$

(پ) $\Delta K = W_{mg} + W_T \Rightarrow -\frac{1}{2}mv^2 = -mgd + W_T$

دوباره از قضیهٔ کار انرژی جنبشی استفاده می‌کنیم.

$W_T = mgd - \frac{1}{2}mv^2 = 6840\,J$

●●●۲۵- در شکل ۷-۳۵، قالب پنیری به جرم ۰/۲۵۰kg بر کف اتاقک بالابری به جرم ۹۰۰ kg قرار دارد. اتاقک توسط کابلی نخست به اندازهٔ مسافت $d_1 = 2.40\,m$ و سپس به اندازهٔ $d_2 = 10.5\,m$ رو به بالا کشیده می‌شود. (الف) اگر در طی مسافت d_1، نیروی عمودی وارد بر قالب پنیر از سوی کف مقدار ثابت $F_N = 3.00\,N$ را داشته باشد، چقدر کار توسط کابل روی اتاقک انجام شده است؟ (ب) اگر در طی مسافت d_2 کار انجام شده روی اتاقک توسط نیروی (ثابت) کابل برابر با ۹۲/۶۱ kJ باشد، بزرگی F_N چقدر است؟

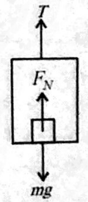


شکل ۷-۳۵ مسئلهٔ ۲۵

حل: (الف)

$F_N - mg = ma$

$a = \frac{F_N - mg}{m} = \frac{3 - 2.45}{0.25} = 2.2\,m/s^2$



سپس نیروی T، نیروی کابل را می‌یابیم:

$T - (m+M)g = (m+M)a \Rightarrow T = (m+M)(g+a)$

$T = (900 + 0.25)(9.8 + 2.2) = 10803\,N$

سپس کار نیروی T را محاسبه می‌کنیم:

$W_T = Td = 10803\times2.4 = 2.59\times10^4\,J$

(ب) نیروی T را در اینجا می‌یابیم:

$W = Td_2 = 92.61\,kJ \Rightarrow T = \frac{W}{d_2} = \frac{92.61\,kJ}{10.5\,m} = 8.82\,kN$

مانند الف از قانون نیوتون استفاده می‌کنیم و شتاب a را می‌یابیم:

$T - (m+M)g = (m+M)a \Rightarrow a = \frac{8820}{900.25} - 9.8 = 0$

$\Rightarrow F_N - mg = 0 \Rightarrow F_N = mg$

$F_N = 0.25\times9.8 = 2.45\,N$

●۲۶- در طول ترم بهاره در دانشگاه MIT، دانشجویان مقیم در ساختمانهای موازی در خوابگاه پردیس شرقی با تیروکمانهای بزرگی که از لوله‌های لاستیکی جراحی متصل به قاب پنجره ساخته بودند با هم مبارزه می‌کردند. برای این کار یک بادکنک پر از آب رنگی را در کیسه‌ای متصل به لولهٔ لاستیکی قرار می‌دادند و آن را تا پهنای اتاق می‌کشیدند. فرض کنید کشش لولهٔ لاستیکی از قانون هوک پیروی کند و ثابت فنر آن ۱۰۰N/m باشد. اگر لولهٔ لاستیکی به اندازهٔ ۵/۰۰ m کشیده و سپس رها شود، نیروی لولهٔ لاستیکی تا زمانی که به طول واهلیدگی خود برگردد چقدر کار روی بادکنک داخل کیسه انجام می‌دهد؟

حل: $W = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\times100\times(5)^2 = 1.25\times10^3\,J$

●۲۷- یک فنر و یک قطعه را به همان ترتیب شکل ۷-۱۱ در نظر بگیرید. وقتی قطعه رو به بیرون تا $x = +4.0\,cm$ کشیده شود، باید نیرویی به بزرگی ۳۶۰ N را برای نگه داشتن قطعه در این مکان به آن وارد کنیم. وقتی قطعه از $x_i = 5.0\,cm$ به (الف) $x = +3.0\,cm$، (ب) $x = -3.0\,cm$، (پ) $x = -5.0\,cm$، و (ت) $x = -9.0\,cm$ حرکت کند، چقدر کار توسط فنر روی قطعه انجام می‌شود؟

حل: ابتدا ثابت فنر را می‌یابیم:

$F = kx \Rightarrow k = \frac{F}{x} = \frac{360}{4\times10^{-2}} = 9\times10^3\,N/m$

(الف) $W = -\frac{1}{2}k(x_f^2 - x_i^2) = -\frac{1}{2}9\times10^3(25-9)\times10^{-4}$
$= -7.2\,J$

(ب) $W = -\frac{1}{2}\times9\times10^3(25-9)\times10^{-4} = -7.2\,J$

(پ) $W = -\frac{1}{2}\times9\times10^3(25-25)\times10^{-4} = 0$

(ت) $W = -\frac{1}{2}\times9\times10^3(25-81)\times10^{-4} = 25.2\,J$

●۲۸- در شکل ۷-۱۱، باید نیرویی به بزرگی ۸۰ N را برای نگه داشتن قطعه به حالت سکون در $x = -2.0\,cm$ وارد کنیم. آنگاه قطعه را از آن مکان به آرامی حرکت می‌دهیم به گونه‌ای که نیروی ما ۴/۰ J+ کار روی دستگاه فنر- قطعه انجام دهد؛ سپس قطعه دوباره ساکن می‌شود. مکان قطعه در این لحظه چیست؟ (*راهنمایی:* دو پاسخ وجود دارد.)

حل: ابتدا ثابت فنر را می‌یابیم:

$F = kx \Rightarrow k = \frac{F}{x} = \frac{80}{2\times10^{-2}} = 4\times10^3\,N/m$

از قضیهٔ کار انرژی جنبشی داریم:

$\Delta K = W_a + W_s = 0$

$W_s = -W_a$

$W_s = \frac{1}{2}k(x_i^2 - x_f^2) \Rightarrow -x_i^2 - x_f^2 = -\frac{2W_a}{k}$

$x_f^2 = x_i^2 + \frac{2W}{k} \Rightarrow x_f = \sqrt{x_i^2 + \frac{2W_a}{k}}$

$x_f = \pm\sqrt{(-2\times10^{-2})^2 + \frac{2\times4}{4\times10^3}} = \pm4.9\,cm$

●●۲۹- تنها نیروی وارد بر جسمی به جرم ۲/۰kg هنگامی که در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند، دارای مؤلفهٔ x به صورت $F_x = -6x\,N$ است که در آن x بر حسب متر است. سرعت جسم در $x = 3.0\,m$ برابر با ۸/۰m/s است. (الف) سرعت جسم در $x = 4.0\,m$ چقدر است؟ (ب) در چه مقدار مثبتی از x، جسم دارای سرعت ۵/۰m/s است؟ SSM WWW

حل: (الف) از قضیهٔ کار انرژی جنبشی داریم $W = \Delta K$. W را محاسبه می‌کنیم:

$W = \int F(x)dx = -\int_3^4 6x\,dx = -3x^2\Big|_3^4 = -3(16-9) = -21\,J$

$K_f - K_i = W \Rightarrow \frac{1}{2}\times2v_f^2 - \frac{1}{2}\times2\times v_i^2 = -21$

$v_f^2 = v_i^2 - 21$

$v_f = \sqrt{64-21} = 6.55\,m/s$

(ب) کار را تا نقطهٔ مجهول x محاسبه می‌کنیم و برابر با تغییرات انرژی جنبشی قرار می‌دهیم:

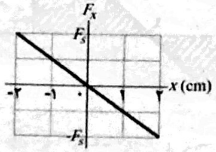
$W = \int F(x)dx = -\int_3^x 6x\,dx = -3x^2\Big|_3^x = -3(x^2 - 9)$
$= 27 - 3x^2$

$\Delta K = W$

$\frac{1}{2}\times2\times(25) - \frac{1}{2}\times2\times(64) = 27 - 3x^2 \Rightarrow 3x^2 = 66$

$\Rightarrow x^2 = 22 \Rightarrow x = 4.69\,m$

●●۳۰- شکل ۷-۳۶ نیروی فنر F_x را برحسب مکان x برای ترکیب فنر- قطعهٔ شکل ۷-۱۱ نشان می‌دهد. مقیاس با $F_s = 160.0\,N$ مشخص شده است. قطعه را رو به بیرون تا $x = 12\,cm$ می‌کشیم و سپس رها می‌کنیم. وقتی قطعه از $x_i = +8.0\,cm$ به (الف) $x = +5.0\,cm$، (ب) $x = -5.0\,cm$، (پ) $x = -8.0\,cm$ و (ت) $x = -10.0\,cm$ حرکت کند، چقدر کار توسط فنر روی قطعه انجام می‌شود؟



شکل ۷-۳۶ مسئلهٔ ۳۰

حل: ابتدا ثابت فنر را می‌یابیم:

$F = kx \Rightarrow k = \frac{F}{x} = \frac{160}{2\times10^{-2}} = 8000\,N/m$

(الف)

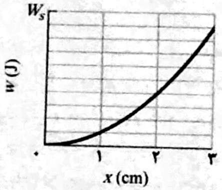
$W = \frac{1}{2}k(x_i^2 - x_f^2) = \frac{1}{2}\times8\times10^3(64-25)\times10^{-4} = 15.6\,J$

(ب) $W = \frac{1}{2}\times8\times10^3(64-25)\times10^{-4} = 15.6\,J$

(پ) $W = \frac{1}{2}\times8\times10^3(64-64)\times10^{-4} = 0\,J$

(ت) $W = \frac{1}{2}\times8\times10^3(64-100)\times10^{-4} = -14.4\,J$

●●۳۱- در آرایش شکل ۷-۱۱، قطعه را بتدریج از $x = 0$ تا $x = +3.0\,cm$، که در آنجا ساکن می‌شود، می‌کشیم. شکل ۷-۳۷ کار انجام شده توسط نیروی ما را بر قطعه نشان می‌دهد. مقیاس محور قائم شکل با $W_s = 1.0\,J$ مشخص شده است. سپس قطعه را رو به بیرون تا $x = +5.0\,cm$ می‌کشیم و آن را از حالت سکون رها می‌کنیم. وقتی قطعه از $x_i = +5.0\,cm$ به (الف) $x = +4.0\,cm$، (ب) $x = -2.0\,cm$، و (پ) $x = -5.0\,cm$ حرکت کند، چقدر کار توسط فنر روی قطعه انجام می‌شود؟



شکل ۷-۳۷ مسئلهٔ ۳۱

حل: از طریق انرژی، ثابت فنر را می‌یابیم:

$W = \frac{1}{2}kx^2$

$0.9 = \frac{1}{2}k9\times10^{-4} \Rightarrow k = 2000\,N/m$

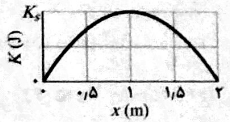
(الف) $W = \frac{1}{2}k(x_i^2 - x_f^2) = \frac{1}{2}\times2\times10^3(25-16)\times10^{-4}$
$= 0.9\,J$

(ب) $W = \frac{1}{2}\times2\times10^3(25-4)\times10^{-4} = 2.1\,J$

(پ) $W = \frac{1}{2}\times2\times10^3(25-25)\times10^{-4} = 0\,J$

●●۳۲- در شکل ۷-۱۱ الف قطعه‌ای به جرم m که روی سطح افقی بدون اصطکاکی قرار دارد به یک سر فنری افقی (با ثابت فنر k) که سر دیگرش در جایی ثابت شده، وصل شده است. وقتی نیروی افقی $\vec{F}$ در جهت مثبت محور x بر قطعه وارد شود، قطعه در ابتدا به حالت سکون در مکانی است که فنر کشیده نشده است $(x = 0)$. نموداری از انرژی جنبشی قطعه

برحسب مکان x در شکل ۷-۳۸ نشان داده شده است. مقیاس محور قائم شکل با $K_s = 4.0\,J$ مشخص شده است. (الف) بزرگی $\vec{F}$ چقدر است؟ (ب) مقدار ثابت فنر k چقدر است؟



شکل ۷-۳۸ مسئلهٔ ۳۲

حل:

$$\Delta K = W_S + W_F$$

الف و ب

$$\Delta K = -\frac{1}{2}k x^2 + Fx$$

در $x=1$، انرژی جنبشی بیشینه است.

در $x=2$، انرژی جنبشی صفر است.

این دو مورد را در قضیهٔ کار و انرژی جنبشی لحاظ می‌کنیم:

$$4 = F - \frac{1}{2}k(1)^2$$

$$0 = 2F - \frac{1}{2}k(2)^2$$

$$\Rightarrow F = 8\,N \qquad k = 8\,N/m$$

۳۳●●●- قطعهٔ شکل ۷-۱۱ الف روی سطح افقی بدون اصطکاکی قرار دارد و ثابت فنر برابر با $50\,N/m$ است. در ابتدا، فنر در طول واهلیده‌اش واقع است و قطعه به حالت سکون در مکان $x=0$ قرار دارد. آنگاه یک نیروی خارجی با بزرگی ثابت $3.0\,N$ قطعه را آنقدر در جهت مثبت محور x می‌کشد تا سرانجام متوقف شود. وقتی قطعه به نقطهٔ توقف برسد (الف) مکان قطعه چیست؟ (ب) کاری که توسط نیروی خارجی بر قطعه انجام شده چقدر است؟ و (پ) کار انجام شده توسط نیروی فنر بر قطعه چقدر است؟ در طی جابه‌جایی قطعه (ت) مکان قطعه به هنگامی که انرژی جنبشی آن بیشینه است چیست و (ث) مقدار آن انرژی جنبشی بیشینه چقدر است؟

حل: (الف) $\Delta K = 0 \Rightarrow W_s + W_F = 0 \Rightarrow W_s = -W_F$

طبق قضیهٔ کار-انرژی جنبشی:

$$W_s = -\frac{1}{2}kx^2 \qquad W_F = Fx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}kx^2 = Fx \Rightarrow x = \frac{2F}{k} \Rightarrow x = 0.12\,m$$

(ب) $W_F = Fx = 3\times 0.12 = 0.36\,J$

(پ) $W_s = -W_F = -0.36\,J$

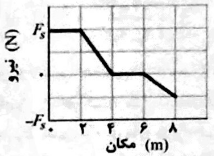
(ت) انرژی جنبشی را به صورت تابعی از x بیان می‌کنیم، از آن مشتق می‌گیریم و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$K = W_S + W_F = -\frac{1}{2}kx^2 + Fx$$

$$\frac{dK}{dx} = 0 \Rightarrow -kx + F + 0 \Rightarrow x = \frac{F}{k} = 0.06\,m$$

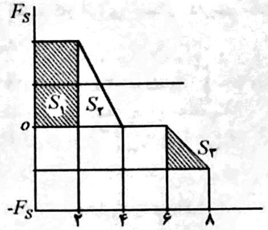
(ث) $K = -\frac{1}{2}\times 50\times(0.06)^2 + 3\times 0.06 = 0.09\,J$

۳۴●- قطعه‌ای به جرم $5.0\,kg$ در امتداد یک خط مستقیم روی سطح افقی بدون اصطکاکی تحت تأثیر نیرویی که با مکان مطابق شکل ۷-۳۹ تغییر می‌کند، در حرکت است. مقیاس محور قائم شکل با $F_s = 10.0\,N$ مشخص شده است. وقتی قطعه از مبدأ تا $x = 8.0\,m$ حرکت کند، چقدر کار توسط نیروی وارد بر آن، انجام می‌شود؟



شکل ۷-۳۹ مسئلهٔ ۳۴

حل: کار برابر است با سطح زیر نمودار:



$$W = \int F(x)dx$$

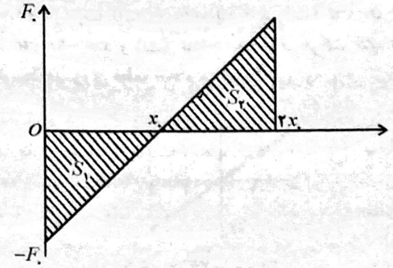
$$W = \int_{S_1} F(x)dx + \int_{S_2} F(x)dx + \int_{S_3} F(x)dx$$

$$W = +10\times 2 + \frac{1}{2}\times 10(4-2) + \frac{1}{2}\times(-5)(8-6)$$

$$= +20 + 10 - 5 = 25\,J$$

۳۵●- نیروی وارد بر ذره‌ای که در امتداد محور x بر آن وارد شده با رابطهٔ $F = F_0(x/x_0 - 1)$ داده شده است. کار انجام شده توسط این نیرو را برای رفتن ذره از $x=0$ به $x = 2x_0$ (الف) با رسم $F(x)$ و اندازه‌گیری کار از روی نمودار و (ب) با انتگرالگیری از $F(x)$، به دست آورید. SSM WWW

حل: (الف)



$$F = F_0\left(\frac{x}{x_0} - 1\right)$$

$$W = \int F(x)dx$$

کار برابر است با سطح زیر نمودار:

$$W_{S_1} = -\frac{1}{2}\times F_0\times x_0 = -\frac{F_0 x_0}{2}$$

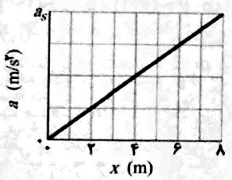
$$W_{S_2} = \frac{1}{2}F_0(2x_0 - x_0) = \frac{F_0 x_0}{2}$$

$$W = W_{S_1} + W_{S_2} = 0$$

(ب)

$$W = \int F(x)dx = \int_0^{2x_0} F_0\left(\frac{x}{x_0} - 1\right)dx = F_0\left(\frac{x^2}{2x_0} - x\right)\Big|_0^{2x} = 0$$

۳۶●- آجری به جرم $10\,kg$ در امتداد محور x حرکت می‌کند. شتاب آن برحسب تابعی از مکان در شکل ۷-۴۰ نشان داده شده است. وقتی آجر از $x=0$ به $x = 8.0\,m$ حرکت کند، کار انجام شدهٔ خالص روی آن توسط نیروی ایجاد کنندهٔ شتاب چقدر است؟ ILW



شکل ۷-۴۰ مسئلهٔ ۳۶

حل: $F(x) = ma(x)$

$$W = \int F(x)dx = m\int a(x)dx = 10\frac{1}{2}\times 20\times 8 = 800\,J$$

۳۷●●- یک نیروی تنها بر جسم ذره مانندی به جرم $3.0\,kg$ چنان اثر می‌کند که مکان جسم برحسب تابعی از زمان با $x = 3.0t - 4.0t^2 + 1.0t^3$ داده می‌شود، که در آن x برحسب متر و t برحسب ثانیه است. کار انجام شده توسط نیرو روی جسم را از $t=0$ تا $t = 4.0\,s$ به دست آورید.

حل: سرعت را محاسبه می‌کنیم و از طریق آن انرژی جنبشی را می‌یابیم:

$$V = \frac{dx}{dt} = 3 - 8t + 3t^2$$

$$W = \Delta K = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2)$$

$$v(t=0) = 3\,m/s$$

$$v(t=4) = 3 - 32 + 48 = 19\,m/s$$

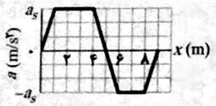
$$W = \frac{1}{2}\times 3\times((19)^2 - 9) = 528\,J$$

۳۸●●- یک قوطی ساردین توسط نیروی $F = \exp(-4x^2)$ که در آن x برحسب متر و F برحسب نیوتون است، در امتداد محور x از $x = 0.25\,m$ به $x = 1.25\,m$ حرکت داده می‌شود. این نیرو چقدر کار روی قوطی انجام می‌دهد؟

حل: انتگرال‌گیری کار کاملاً عددی است.

$$W = \int F(x)dx = \int_{0.25}^{1.25} e^{-4x^2}dx = 0.21\,J$$

۳۹●●- شکل ۷-۴۱ شتاب ذره‌ای به جرم $2.00\,kg$ را نشان می‌دهد که تحت تأثیر نیروی $\vec{F}_a$ از حالت سکون در امتداد محور x از $x=0$ تا $x = 9.0\,m$ حرکت کرده است. مقیاس محور قائم در شکل با $a_s = 6.0\,m/s^2$ مشخص شده است. وقتی ذره به (الف) $x = 4.0\,m$، (ب) $x = 7.0\,m$ و (پ) $x = 9.0\,m$ می‌رسد، این نیرو چقدر روی ذره کار انجام داده است؟ وقتی ذره به (ت) $x = 4.0\,m$، (ث) $x = 7.0\,m$، و (ج) $x = 9.0\,m$ می‌رسد، تندی و جهت حرکت ذره چیست؟



شکل ۷-۴۱ مسئلهٔ ۳۹

حل:

(الف) کار برابر است با سطح زیر نمودار نیرو-مکان

$$W = \int F(x)dx = m\int a(x)dx$$

$$W = 2\times\left[\frac{1}{2}\times 6\times 1 + 3\times 6\right] = 2[21] = 42\,J$$

(ب)

$$W = 2\left[\frac{1}{2}\times 6\times 1 + 3\times 6 + \frac{1}{2}\times 6\times 1 - \frac{1}{2}\times 6\times 1 - 1\times 6\right] = 30\,J$$

(پ)

$$W = 2\left[\frac{1}{2}\times 6\times 1 + 3\times 6 + \frac{1}{2}\times 6\times 1 - \frac{1}{2}\times 6\times 1 - 2\times 6 - \frac{1}{2}\times 6\times 1\right] = 12\,J$$

(ت)

$$W = \Delta K \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = 42 \Rightarrow v^2 = \sqrt{42} \Rightarrow v = 6.48\,m/s$$

سرعت در جهت $+x$ است.

(ث)

$$\frac{1}{2}mv^2 = 30 \Rightarrow v = \sqrt{30} = 5.47\,m/s$$

سرعت در جهت $+x$ است.

(ج)

$$\frac{1}{2}mv^2 = 12 \Rightarrow v = \sqrt{12} = 3.46\,m/s$$

سرعت در جهت $+x$ است.

۴۰●●- بر قطعه‌ای به جرم $1.5\,kg$ که در ابتدا روی سطح افقی بدون اصطکاکی ساکن است، یک نیروی افقی در جهت مثبت محور x وارد می‌شود. این نیرو با رابطهٔ $\vec{F}(x) = (2.5 - x^2)\hat{i}\,N$ داده می‌شود که در آن x برحسب متر و مکان اولیهٔ قطعه $x=0$

است. (الف) وقتی قطعه از $x = ۲/۰m$ می‌گذرد، انرژی جنبشی آن چقدر است؟ (ب) در بازهٔ $x = ۰$ تا $x = ۲/۰m$ بیشینهٔ انرژی جنبشی قطعه چقدر است؟

حل: (الف) $W = \int F(x)dx = \int_۰^۲ (۲/۵ - x^۲)dx = ۲/۳J$

$W = \Delta K \Rightarrow K = W = ۲/۳J$

(ب) انرژی جنبشی را به صورت تابعی از x بیان می‌کنیم و آن را قرین می‌کنیم:

$$K = \int F(x)dx \Rightarrow K = ۲/۵x - \frac{x^۳}{۳}$$

$$\frac{dK}{dx} = ۰ \Rightarrow x = ۱/۵۸m$$

$$K(x = ۱/۵۸) = ۲/۵(۱/۵۸) - \frac{(۱/۵۸)^۳}{۳} = ۲/۶۳J$$

۴۱●●- نیروی $\vec F = (cx - ۳/۰۰x^۲)\hat i$ که در آن $\vec F$ برحسب نیوتون، x برحسب متر و c ثابت است، بر ذره‌ای که در امتداد محور x حرکت می‌کند، وارد می‌شود. انرژی جنبشی ذره در $x = ۰$ برابر ۲۰/۰J، و در $x = ۳/۰۰m$ برابر ۱۱/۰J است. c را پیدا کنید.

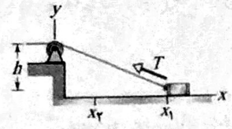
حل: از قضیهٔ کار انرژی جنبشی استفاده می‌کنیم:

$$\Delta K = W \Rightarrow \Delta K = \int_۰^۳ (Cx - ۳x^۲)dx = \frac{C}{۲}x^۲ - x^۳\Big|_۰^۳$$

$$\Delta K = \frac{C}{۲}(۹) - ۲۷ \Rightarrow ۱۱ - ۲۰ = \frac{۹}{۲}C - ۲۷$$

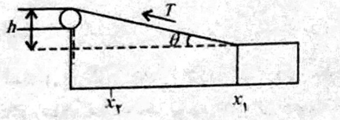
$$\frac{۹}{۲}C = ۱۸ \Rightarrow C = ۴J/m^۲$$

۴۲●●●- شکل ۷-۴۲ ریسمانی را نشان می‌دهد که به ارابه‌ای متصل شده است و می‌تواند روی ریل افقی بدون اصطکاکی در امتداد محور x حرکت کند. انتهای چپ ریسمان از روی قرقره‌ای با جرم و اصطکاک ناچیز در ارتفاع ریسمان $h = ۱/۲۰m$ گذشته است. وقتی ارابه از $x_۱ = ۳/۰۰m$ تا $x_۲ = ۱/۰۰m$ بلغزد، ریسمان کشش ثابت ۲۵/۰N را دارد. در طی این حرکت، تغییر در انرژی جنبشی ارابه چقدر است؟



شکل ۷-۴۲ مسئلهٔ ۴۲

حل: کار را با انتگرال‌گیری از نیرو پیدا می‌کنیم.



$$W = \Delta K$$

$$W = \int \vec T \cdot d\vec r = \int -T_x dx = \int -T\cos\theta\, dx$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^۲ + h^۲}}$$

$$W = -T\int_{x_۱=۳}^{x_۲=۱} \frac{x}{\sqrt{x^۲+h^۲}}dx \Rightarrow$$

$$W = -T\left[\sqrt{x^۲+h^۲}\right]_{x_۱}^{x_۲} = T\left[\sqrt{x_۱^۲+h^۲} - \sqrt{x_۲^۲+h^۲}\right]$$

$$W = -۲۵\left[\sqrt{۱+(۱/۲)^۲} - \sqrt{۹+(۱/۲)^۲}\right]$$

$$= ۴۱/۷J$$

از قضیهٔ کار انرژی جنبشی داریم

$$\Delta K = W = ۴۱/۷J$$

۴۳●- قطعه‌ای به جرم ۱۰۰kg با تندی ثابت ۵/۰m/s توسط نیرویی به بزرگی ۱۲۲N که جهتش ۳۷° بالای افق است، روی یک کف افقی کشیده می‌شود. با چه آهنگی نیرو روی قطعه کار انجام می‌دهد؟ **SSM ILW**

حل: توان لحظه‌ای برابر است با:

$$P = \vec F \cdot \vec V = FV\cos\theta = (۱۲۲)\times۵\times\cos(۳۷°)$$

$$= ۴/۸۷\times۱۰^۲ W$$

۴۴●- اتاقک بار شدهٔ بالابری به جرم $۳/۰\times۱۰^۳$ kg در مدت ۲۳s با تندی ثابت مسافت ۲۱۰m را بالا می‌رود. نیروی کابل با چه آهنگ متوسطی بر اتاقک کار انجام می‌دهد؟

حل: توان متوسط برابر است با:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} \qquad \Delta W = mg\Delta y$$

$$P = mg\frac{\Delta y}{\Delta t} = ۳\times۱۰^۳\times۹/۸\,\frac{۲۱۰}{۲۳} = ۲/۶۸\times۱۰^۵ W$$

۴۵●- یک نیروی ۵/۰ نیوتونی بر جسمی به جرم ۱۵kg که در ابتدا ساکن است وارد می‌شود. کار انجام شده توسط نیرو را (الف) در ثانیهٔ اول، (ب) در ثانیهٔ دوم، و (پ) در ثانیهٔ سوم محاسبه کنید. (ت) توان لحظه‌ای این نیرو در پایان ثانیهٔ سوم چقدر است؟ **SSM**

حل: (الف) شتاب برابر است با: $a = \frac{F}{m} = \frac{۵}{۱۵} = \frac{۱}{۳}m/s^۲$

$$v = at = \frac{۱}{۳}\times۱ = \frac{۱}{۳}m/s$$

$$W = \Delta K = \frac{۱}{۲}mv^۲ = \frac{۱}{۲}\times(۱۵)\left(\frac{۱}{۳}\right)^۲ = ۰/۸۳J$$

(ب) $v = at \Rightarrow v(t=۲) = \frac{۲}{۳}m/s$

$$W = \Delta K = \frac{۱}{۲}m(v^۲ - v_۱^۲) = \frac{۱}{۲}\times۱۵\left(\frac{۴}{۹} - \frac{۱}{۹}\right) = ۲/۵J$$

(پ) $v(t=۳) = ۱m/s$

$$W = \Delta K = \frac{۱}{۲}\times۱۵\left(۱ - \frac{۴}{۹}\right) = ۴/۱۶J$$

(ت) $P = \vec F \cdot \vec v = Fat = ۵\times\frac{۱}{۳}\times۳ = ۵W$

۴۶●- اسکی بازی روی شیب بدون اصطکاکی که با افق زاویهٔ ۱۲° می‌سازد، به کمک یک طناب یدک‌کش که موازی با شیب با تندی ثابت ۱/۰m/s حرکت می‌کند به بالا کشیده می‌شود. برای آنکه اسکی باز مسافت ۸/۰m را روی سطح شیبدار بالا برود، نیروی طناب کاری برابر با ۹۰۰J روی او انجام می‌دهد. (الف) اگر طناب با تندی ثابت ۲/۰m/s حرکت کند، نیروی طناب چقدر کار روی اسکی باز انجام می‌دهد؟ وقتی طناب (ب) با تندی ۱/۰m/s و (پ) با تندی ۲/۰m/s حرکت کند، نیروی طناب با چه آهنگی روی اسکی باز کار انجام می‌دهد؟

حل: (الف) چون $\Delta k = ۰$ است. سپس کار انجام شده برابر با کار نیروی وزن است که برابر با همان ۹۰۰J می‌شود.

(ب) $W = \vec F \cdot \vec d = Fd \Rightarrow F = \frac{W}{d} = \frac{۹۰۰}{۸} = ۱۱۲/۵N$

$$P = \vec F \cdot \vec v = Fv = ۱۱۲/۵\times۱ = ۱۱۲/۵W$$

(پ) $P = Fv = ۱۱۲/۵\times۲ = ۲۲۵W$

۴۷●●- اتاقک پر شدهٔ یک بالابر به جرم کل ۱۲۰۰kg با شروع از حالت سکون، ۵۴m مسافت را با تندی ثابت در مدت ۳/۰min رو به بالا طی می‌کند و سپس متوقف می‌شود. جرم وزنهٔ تعادل بالابر فقط ۹۵۰kg است و از اینرو موتور بالابر باید به این کار کمک کند. توان متوسط مورد نیاز که موتور توسط کابل بر اتاقک وارد می‌کند چقدر است؟ **SSM**

حل: از قانون نیوتون برای یافتن نیروی طناب، T، استفاده می‌کنیم. سپس کار آن را محاسبه می‌کنیم.

$$\sum F = ۰ \Rightarrow T + ۹۵۰\times۹/۸ = ۱۲۰۰\times۹/۸$$

$$T = ۲۴۵۰N$$

$$W = \vec T \cdot \vec d = ۲۴۵۰\times۵۴ = ۱/۳۲۳\times۱۰^۵ J$$

$$\bar P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{۱/۳۲۳\times۱۰^۵}{۳\times۶۰} = ۷۳۵W$$

۴۸●●- (الف) در یک لحظهٔ معین، بر جسم ذره مانندی که در حال حرکت با سرعت $\vec v = -(۲/۰m/s)\hat i + (۴/۰m/s)\hat k$ است، نیروی $\vec F = (۴/۰N)\hat i - (۲/۰N)\hat j + (۹/۰N)\hat k$ وارد می‌شود. نیرو با چه آهنگ لحظه‌ای روی جسم کار انجام می‌دهد؟ (ب) در زمان دیگری، سرعت فقط دارای مؤلفهٔ y است. اگر نیرو تغییر نکند و توان لحظه‌ای -۱۲W- باشد، سرعت جسم درست در آن لحظه چقدر است؟

حل: (الف) از تعریف توان و ضرب داخلی داریم:

$$P = \vec F \cdot \vec v = F_xv_x + F_yv_y + F_zv_z = F_xv_x + F_zv_z$$

$$P = -۲\times۴ + ۴\times۹ = ۲۸W$$

(ب) $P = \vec F \cdot \vec v = F_yv_y$

$$\Rightarrow -۱۲ = -۲\times v_y \Rightarrow v_y = +۶m/s$$

۴۹●●- ماشینی، یک بسته به جرم ۴/۰kg را از مکان اولیهٔ $\vec d_i = (۰/۵۰m)\hat i + (۰/۷۵m)\hat j + (۰/۲۰m)\hat k$ در زمان $t = ۰$ به مکان نهایی $\vec d_f = (۷/۵۰m)\hat i + (۱۲/۰m)\hat j + (۷/۲۰m)\hat k$ در زمان $t = ۱۲s$ می‌رساند. نیروی ثابتی که ماشین بر بسته وارد کرده عبارت است از $\vec F = (۲/۰۰N)\hat i + (۴/۰۰N)\hat j + (۶/۰۰N)\hat k$. برای این جابه‌جایی، مطلوب است (الف) کار انجام شده توسط نیروی ماشین روی بسته و (ب) توان متوسط نیروی ماشین بر بسته.

حل: از تعریف کار داریم:

$$W = \vec F \cdot \Delta\vec d$$

$$\Delta\vec d = (۷/۵ - ۰/۵)\hat i + (۱۲ - ۰/۷۵)\hat j + (۷/۲ - ۰/۲)\hat k$$

$$\Delta\vec d = ۷\hat i + ۱۱/۲۵\hat j + ۷\hat k$$

$$W = F_x\Delta d_x + F_y\Delta d_y + F_z\Delta d_z$$

$$W = ۲\times۷ + ۴\times۱۱/۲۵ + ۶\times۷ = ۱۰۱J$$

(پ) توان متوسط برابر است با:

$$\bar P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{۱۰۱}{۱۲} = ۸/۴۱W$$

۵۰●●- ملاقه‌ای به جرم ۰/۳۰kg که روی سطح افقی بدون اصطکاکی می‌لغزد به یک سر فنری افقی $(k = ۵۰۰N/m)$ که سر دیگر آن به جایی ثابت شده، وصل شده است. هنگامی که ملاقه از مکان تعادلش (نقطه‌ای که در آنجا نیروی فنر صفر است) می‌گذرد دارای انرژی جنبشی ۱۰J است. (الف) هنگامی که ملاقه از مکان تعادلش می‌گذرد فنر با چه آهنگی روی آن کار انجام می‌دهد؟ (ب) هنگامی که فنر ۰/۱۰m فشرده شده و ملاقه در حال دور شدن از مکان تعادل باشد، فنر با چه آهنگی روی ملاقه کار انجام می‌دهد؟

حل: (الف) در مکان تعادل، نیرو صفر است، پس

$$P = \vec F \cdot \vec v \qquad \vec F = ۰ \Rightarrow P = ۰$$

(ب)

$$P = \vec F \cdot \vec v \qquad F = -kx = -۵۰۰\times۰/۱ = -۵۰N$$

از قضیهٔ کار- انرژی جنبشی برای یافتن سرعت استفاده می‌کنیم

$$\Delta K = -\frac{۱}{۲}kx^۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲}mv^۲ - ۱۰ = -\frac{۱}{۲}kx^۲$$

$$\frac{۱}{۲}(۰/۳)(v^۲) = -\frac{۱}{۲}(۵۰۰)(۱۰^{-۲}) + ۱۰$$

$$\Rightarrow v = ۷/۰۷m/s$$

$$P = \vec F \cdot \vec v = -۵۰\times۷/۰۷ = -۳۵۳/۵W$$

۵۱●●●- نیروی $\vec F = (۳/۰۰N)\hat i + (۷/۰۰N)\hat j + (۷/۰۰N)\hat k$ بر جسم متحرکی به جرم ۲/۰۰kg که از مکان اولیهٔ $\vec d_i = (۳/۰۰m)\hat i - (۲/۰۰m)\hat j + (۵/۰۰m)\hat k$ به مکان نهایی $\vec d_f = -(۵/۰۰m)\hat i + (۴/۰۰m)\hat j + (۷/۰۰m)\hat k$ در مدت ۴/۰۰s می‌رود، وارد شده است. مطلوب است (الف) کار انجام شده توسط نیرو بر جسم در بازهٔ زمانی ۴/۰۰s، (ب) توان

متوسط ناشی از نیرو در آن بازه، و (پ) زاویهٔ میان بردارهای $\vec{d}_f$ و $\vec{d}_i$.

حل: (الف) از تعریف کار استفاده می‌کنیم:

$W=\vec{F}\cdot\Delta\vec{d}$

جابه‌جایی کل، $\Delta\vec{d}$ را می‌یابیم:

$\Delta\vec{d}=\vec{d}_f-\vec{d}_i=-8\hat{i}+6\hat{j}+2\hat{k}$

$W=\vec{F}\cdot\Delta\vec{d}=(3\times-8)+(7\times6)+(7\times2)=32\,J$

(ب) توان متوسط برابر است با:

$$\bar{P}=\frac{\Delta W}{\Delta t}=\frac{32J}{4s}=8\,W$$

(پ) از تعریف ضرب داخلی استفاده می‌کنیم:

$$\cos\phi=\frac{\vec{d}_f\cdot\vec{d}_i}{|\vec{d}_f|\,|\vec{d}_i|}=\frac{(3)(-5)+(-2)(4)+(5)(7)}{\sqrt{9+4+25}\sqrt{25+16+49}}=0.2$$

$\phi=\cos^{-1}(0.2)=78.16°$

۵۲●●●- یک ماشین مسابقه از حالت سکون شتاب می‌گیرد و فاصلهٔ معینی از مسیر را در زمان T با موتوری با توان ثابت P طی می‌کند. اگر افراد یاری دهنده ماشین بتوانند توان موتور را به مقدار دیفرانسیلی dP افزایش دهند، چه تغییری در زمان به حرکت درآمدن مورد نیاز است.

حل:

$$P=\frac{W}{T}\Rightarrow dP=\frac{-W}{T^2}dT=-P\frac{dT}{T}$$

$$dT=-T\frac{dP}{P}$$

یعنی زمان به اندازهٔ dT تغییر می کند. (کم می‌شود)

۵۳- انفجاری در سطح زمین دهانه‌ای را بر جای می‌گذارد که قطر آن متناسب با انرژی انفجار به توان $\frac{1}{3}$ است. انفجار یک مگاتن TNT دهانه‌ای با قطر 1 km را بر جای می‌گذارد. در زیر دریاچهٔ هورون[1] در میشیگان، یک دهانهٔ ضربه‌ای قدیمی به قطر 50 km وجود دارد. انرژی جنبشی وابسته به آن ضربه برحسب (الف) مگاتن TNT (۱ مگاتن، 4.2×10^{15} J انرژی به دست می‌دهد) و (ب) معادل بمب هیروشیما (هر یک، ۱۳ کیلوتن TNT) چقدر است؟ (شهاب سنگها یا ستاره‌های دنباله‌داری که در قدیم به زمین برخورد کرده‌اند ممکن است آب و هوای کرهٔ زمین را به میزان قابل ملاحظه‌ای تغییر داده و در انقراض دایناسورها و سایر گونه‌های زیستی نقش بازی کرده باشند.)

حل:

$D\propto E^{1/3}$

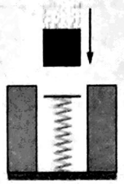
(الف) $\left(\frac{D_2}{D_1}\right)=\left(\frac{E_2}{E_1}\right)^{1/3}\Rightarrow\frac{E_2}{E_1}=\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^3$

$E_2=E_1\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^3=1\,\text{MTon}\left(\frac{50}{1}\right)^3=1.25\times10^5\ \text{Mton}$

(ب) $\frac{1.25\times10^5\ \text{Mton}}{13\times10^{-3}\ \text{Mton}}=10^7$ بمب

1. Huron

۵۴- قطعه‌ای به جرم 250 g روی فنر واهلیدهٔ قائمی با ثابت فنر $k=2.5\,N/cm$ فرو می‌افتد (شکل ۷-۴۳). قطعه به فنر می‌چسبد و فنر را تا پیش از توقف لحظه‌ای 12 cm فشرده می‌کند. هنگامی که فنر فشرده می‌شود، چقدر کار توسط (الف) نیروی گرانشی وارد بر آن و (ب) نیروی فنر انجام شده است؟ (پ) تندی قطعه درست پیش از برخورد آن با فنر چقدر است؟ (فرض کنید اصطکاک ناچیز است.) (ت) اگر تندی در هنگام برخورد دو برابر شود، فشردگی بیشینهٔ فنر چقدر می‌شود؟



شکل ۷-۴۳ مسئلهٔ ۵۴

حل: (الف) $k=2.5\,N/cm=250\,N/m$

کار نیروی وزن برابر است با:

$W=mgd=250\times10^{-3}\times9.8\times12\times10^{-2}=0.294\,J$

(ب) کار نیروی فنر برابر است با:

$W=-\frac{1}{2}kd^2=-\frac{1}{2}\times250\times(12\times10^{-2})^2=-1.8\,J$

(نیرو خلاف جابه‌جایی است)

(پ) از قضیهٔ کار- انرژی جنبشی داریم:

$\Delta K=W$ کل

$0-\frac{1}{2}mv^2=-1.8+0.294\Rightarrow-\frac{1}{2}\times250\times10^{-3}v^2=-1.506$

$\Rightarrow v=3.47\,m/s$

(ت) $-\frac{1}{2}m(2v_0)^2=-\frac{1}{2}kd^2+mgd$

$\Delta K=W$ کل

$$d=\frac{mg+\sqrt{m^2g^2+mkv_0^2}}{k}=0.23\,m$$

۵۵- کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}=(2x\,N)\hat{i}+(3N)\hat{j}$، که در آن x برحسب متر است، برای بردن ذره‌ای از مکان $\vec{r}_i=(2m)\hat{i}+(3m)\hat{j}$ به مکان $\vec{r}_f=-(4m)\hat{i}-(3m)\hat{j}$ چقدر است؟

حل:

$W=\int\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int F_x dx+\int F_y dy$

$W=\int_2^{-4}2x\,dx+\int_3^{-3}3\,dy=x^2\Big|_2^{-4}+3x\Big|_3^{-3}$

$W=(16-4)+3(-3-3)=12-18=-6\,J$

۵۶- برای کشیدن صندوقی به جرم 50 kg روی یک کف افقی بدون اصطکاک، کارگری نیروی 210 N را در جهت 20° بالای افق بر آن وارد می‌کند. هنگامی که صندوق به اندازهٔ 3.0 m حرکت کند، چقدر کار توسط (الف) نیروی کارگر، (ب) نیروی گرانشی وارد بر صندوق، و (پ) نیروی عمودی وارد بر صندوق از طرف کف، انجام شده است؟ (ت) کار کل انجام شده روی صندوق چقدر است؟

حل: (الف)

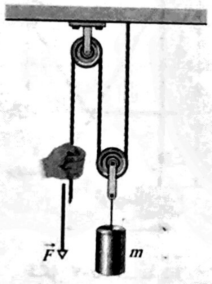
$W=\vec{F}\cdot\vec{d}=Fd\cos\theta=210\times3\times\cos(20°)=592\,J$

(ب) صفر

(پ) صفر

(ت) 592J

۵۷- در شکل ۷-۴۴، ریسمانی از دور دو قرقرهٔ بدون جرم و بدون اصطکاک می‌گذرد. وزنه‌ای به جرم $m=20\,kg$ از یکی از قرقره‌ها آویزان است، و نیروی $\vec{F}$ بر سر آزاد ریسمان وارد می‌شود. (الف) اگر بخواهیم وزنه را با تندی ثابتی بالا بیاوریم، بزرگی $\vec{F}$ چقدر باید باشد؟ (ب) برای بالا بردن وزنه به اندازهٔ 2.0 cm، طرف آزاد ریسمان را چقدر باید کشید؟ در حین بالا بردن، کار انجام شده روی وزنه توسط (پ) نیروی وارده (از طریق ریسمان) و (ت) نیروی گرانشی چقدر است؟ (*راهنمایی:* وقتی ریسمانی به دور یک قرقره مشابه شکل بپیچد، قرقره را با نیروی خالصی که دو برابر کشش ریسمان است، می‌کشد.)

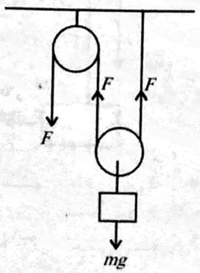


شکل ۷-۴۴ مسئلهٔ ۵۷

حل: (الف)

$2F=mg$

$F=\frac{1}{2}mg=\frac{1}{2}\times20\times9.8=98\,N$



(ب) جابه‌جایی سمت چپ، برابر با مجموع جابه‌جایی‌های سمت راست است، پس

$d=2cm+2cm=4cm$

(پ) $W=\vec{F}\cdot\vec{d}=98\times4\times10^{-2}=3.92\,J$

(ت) $W=m\vec{g}\cdot\vec{d}=-mgd=-196\times2\times10^{-2}=-3.92\,J$

۵۸- ذره‌ای تحت تأثیر نیروی $\vec{F}=(4.0N)\hat{i}+C\hat{j}$، جابه‌جایی $\vec{d}=(3.0m)\hat{i}-(2.0m)\hat{j}$ را انجام می‌دهد. (نیروهای دیگری نیز بر ذره وارد می‌شوند.) اگر کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}$ روی ذره (الف) صفر، (ب) 17 J و (پ) -18 J باشد، مقدار C چقدر است؟

حل: (الف) از تعریف کار داریم.

$W=\vec{F}\cdot\vec{d}=F_xd_x+F_yd_y=4\times(3)+(C)\times(-2)=0$

$\Rightarrow12-2C=0\Rightarrow C=6$

(ب) $W=\vec{F}\cdot\vec{d}=(4\times3)+(C\times(-2))=17$

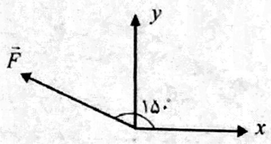
$\Rightarrow12-2C=17\Rightarrow2C=-5\Rightarrow C=-2.5$

(پ) $W=\vec{F}\cdot\vec{d}=(4\times3)+(C\times(-2))=-8$

$\Rightarrow12-2C=-18\Rightarrow2C=30\Rightarrow C=15$

۵۹- نیروی ثابتی به بزرگی 10 N که با جهت مثبت محور x زاویهٔ 150° می‌سازد (به صورت پادساعتگرد اندازه‌گیری شده است) بر جسمی به جرم 2.0 kg که در صفحهٔ xy حرکت می‌کند وارد می‌شود. وقتی جسم تحت این نیرو از مبدأ به نقطه‌ای با بردار مکان $(2.0m)\hat{i}-(4.0m)\hat{j}$ منتقل می‌گردد. چقدر کار روی آن انجام می‌شود؟

حل:



با توجه به شکل برای مؤلفه‌های نیرو داریم:

$F_x=-F\sin60°=-8.66N$

$F_y=F\cos60°=5N$

با توجه به تعریف کار داریم:

$$W=\int\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_0^x F_x d_x+\int_0^y F_y d_y=(-8.66)(2)+(5)(-4)=-37.32J$$

۶۰- جسمی به جرم 2.0 kg که در ابتدا ساکن است به طور افقی و به گونه‌ای یکنواخت در مدت 3.0 s تا تندی 10 m/s شتاب می‌گیرد. (الف) در این بازهٔ 3.0 ثانیه‌ای، چقدر کار روی جسم توسط نیرویی که به آن شتاب داده است، انجام می‌شود؟ توان لحظه‌ای ناشی از آن نیرو (ب) در پایان بازهٔ زمانی و (پ) در پایان نیمهٔ اول بازهٔ زمانی چقدر است؟

حل: (الف) این کار برابر است با تغییرات انرژی جنبشی

$a=\frac{v}{t}=\frac{10}{3}\,m/s^2$

$W = \Delta K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\times ۲(۱۰)^۲ = ۱۰۰\,J$

(ب) $P = \vec{F}\cdot\vec{v} = ma(at) = ma^2t = ۲\times\frac{۱۰۰}{۹}\times ۳ = ۶۶/۷\,W$

(پ) $P = ma^2t = ۲\times\frac{۱۰۰}{۹}\times ۱/۵ = ۳۳/۳\,W$

۶۱- اگر بالابری بخواهد ۱۰۰ اسکی باز با وزن میانگین ۶۶۰N را در مدت ۶۰/۰s با تندی ثابت تا ارتفاع ۱۵۰m بالا ببرد، توان میانگین لازم برای کار نیروی بالابر چقدر است؟

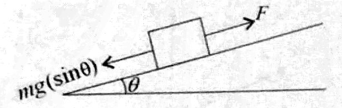
حل: توان میانگین برابر است با:

$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{mg\Delta y}{\Delta t} = \frac{۱۰۰\times ۶۶۰\times ۱۵۰}{۶۰} = ۱/۶۵\times ۱۰^۵\,W$

۶۲- جعبه‌هایی از یک مکان در انبار توسط تسمه‌نقاله‌ای که با تندی ثابت ۰/۵۰m/s حرکت می‌کند، به مکان دیگری منتقل می‌شوند. در یک مکان معین، تسمه‌نقاله از شیبی به طول ۲/۰m که با افق زاویهٔ ۱۰° می‌سازد بالا می‌رود، سپس به طور افقی ۲/۰m را طی می‌کند، و سرانجام از شیب دیگری به طول ۲/۰m که با افق زاویهٔ ۱۰° می‌سازد، پایین می‌آید. فرض کنید یک جعبهٔ ۲/۰ کیلوگرمی بدون لیز خوردن توسط تسمه نقاله منتقل شود. هنگامی که جعبه (الف) از شیب ۱۰° بالا می‌رود، (ب) به طور افقی حرکت می‌کند و (پ) از شیب ۱۰° پایین می‌آید، نیروی تسمه‌نقاله با چه آهنگی روی جعبه کار انجام می‌دهد؟

حل: (الف) $F - mg\sin\theta = ۰ \Rightarrow F = mg\sin\theta$

$P = Fv = mg\sin\theta\, v = (۲\times ۹/۸\times\sin ۱۰°\times ۰/۵) = ۱/۷\,W$



(ب) در این حالت چون سرعت ثابت است، $F = ۰$ است. پس $P = ۰$ است.

(پ) نیرو خلاف جهت جابه‌جایی است. $F = mg\sin\theta$

$P = \vec{F}\cdot\vec{v} = -mg\,v\sin\theta = -۱/۷\,W$

۶۳- اسبی یک صندوق را با نیروی ۴۰ lb با زاویهٔ ۳۰° بالای افق می‌کشد و با تندی ۶/۰mi/h حرکت می‌کند. (الف) در مدت ۱۰min، نیرو چقدر کار انجام می‌دهد؟ (ب) توان متوسط نیرو (برحسب اسب بخار) چقدر است؟ SSM

حل: (الف) $W = \vec{F}\cdot\vec{d} = Fd\cos\theta$

مسافت را به ft تبدیل می‌کنیم

$d = ۶\frac{mi}{h}\times\frac{1}{۶}h = ۱mi = ۵۲۸۰\,ft$

$W = ۴۰\times ۵۲۸۰\times\cos(۳۰°) = ۱/۸\times ۱۰^۵\,ft\cdot lb$

(ب) $\overline{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{۱/۸\times ۱۰^۵}{۶۰۰} = ۳۰۵\,ft\cdot lb/s = ۰/۵۵\,hp$

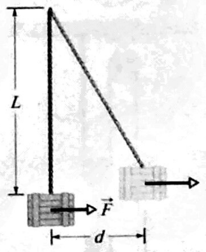
۶۴- یک قایق یخی در لحظه‌ای که بادی ناگهانی نیروی ثابت ۲۰۰N را رو به شرق بر آن وارد می‌آورد، روی یک دریاچهٔ یخ زدهٔ بدون اصطکاک ساکن است. به دلیل سمتگیری بادبان، نیروی باد قایق را در امتداد خطی مستقیم و در جهت ۲۰° شمال شرق به اندازهٔ مسافت ۸/۰m می‌لغزاند. انرژی جنبشی قایق در پایان این ۸/۰m چقدر است؟

حل: از تعریف کار و قضیهٔ کار- انرژی جنبشی داریم.

$\Delta K = W \Rightarrow K = \vec{F}\cdot\vec{d} = Fd\cos\theta$

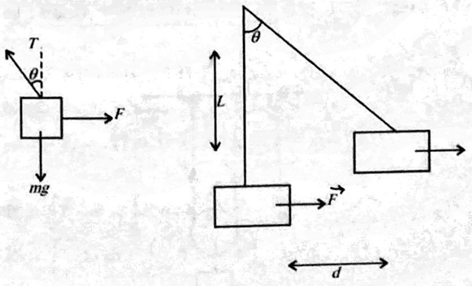
$K = (۲۰۰)\times ۸\times\cos(۲۰°) = ۱۵۰۳/۵\,J$

۶۵- جعبه‌ای به جرم ۲۳۰kg از انتهای ریسمانی به طول $L = ۱۲/۰m$ آویزان است. با نیروی متغیر $\vec{F}$ جعبه را به طور افقی رو به جلو هل می‌دهیم تا به اندازهٔ $d = ۴/۰۰m$ به این طرف حرکت کند (شکل ۷-۴۵). (الف) وقتی جعبه در این مکان نهایی است، بزرگی $\vec{F}$ چقدر است؟ در طی جابه‌جایی جعبه (ب) کار کل انجام شده روی آن، (پ) کار انجام شده توسط نیروی گرانشی روی جعبه، و (ت) کار انجام شده توسط کششی که از ریسمان به جعبه وارد می‌آید، چقدر است؟ (ث) با توجه به اینکه جعبه پیش و پس از جابه‌جایی بدون حرکت است، با استفاده از پاسخهای (ب)، (پ) و (ت) کاری را که نیروی $\vec{F}$ روی جعبه انجام می‌دهد، به دست آورید. (ج) چرا کار نیرو برابر با حاصلضرب جابه‌جایی افقی در پاسخ (الف) نیست؟



شکل ۷-۴۵ مسئلهٔ ۶۵

حل: (الف)



ابتدا نیروی F را می‌یابیم.

$\vec{F}_{net} = ۰$

$T\sin\theta = F$

$T\cos\theta = mg$

$\tan\theta = \frac{F}{mg} \Rightarrow F = mg\tan\theta$

$\tan\theta = \frac{d}{\sqrt{L^2 - d^2}} = \frac{۴}{\sqrt{(۱۲)^2 - (۴)^2}} = ۰/۳۵$

$\theta = ۱۹/۵°$

$\Rightarrow F = (۲۳۰)\times ۹/۸\times ۰/۳۵ = ۷۹۷N$

(ب) $\Delta K = W_{کل} \Rightarrow \Delta K = ۰ \Rightarrow W_{کل} = ۰$

(پ) $W_g = m\vec{g}\cdot\vec{h} = -mgh = -mgl(1-\cos\theta)$

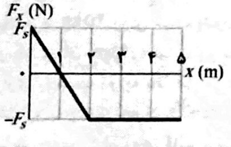
$W_g = -۲۳۰\times ۹/۸\times ۱۲(1-\cos(۱۹/۵°)) = -۱۵۴۷J$

(ت) مسیر یک دایره است، پس بردار $\vec{T}$ بر آن عمود است و $\vec{T}\cdot\vec{d} = ۰$ است.

(ث) $\Delta K = W_{کل} = W_T + W_g = ۰ \Rightarrow W_T = -W_g = ۱۵۴۷J$

(ج) چون نیرو متغیر است.

۶۶- تنها نیروی وارد بر جسمی به جرم ۲/۰kg هنگامی که جسم در امتداد محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل ۷-۴۶ تغییر می‌کند. سرعت جسم در $x = ۰$ برابر ۴/۰m/s است. (الف) انرژی جنبشی در $x = ۳/۰m$ چقدر است؟ (ب) به ازای چه مقداری از x، انرژی جنبشی جسم ۸/۰J است؟ (پ) انرژی جنبشی بیشینهٔ جسم در بازهٔ $x = ۰$ تا $x = ۵/۰m$ چقدر است؟ در شکل مقیاس $\vec{F_s}$ برابر $4N$ است.



شکل ۷-۴۶ مسئلهٔ ۶۶

حل:

$W = \int F(x)dx$

$\Delta K = W$

(الف) $W = -\frac{1}{۲}\times ۴\times ۱ - \frac{1}{۲}\times ۴\times ۱ - ۴\times ۱ = -۴J$

$K - K_۰ = -۴J \Rightarrow K = K_۰ - ۴J$

$\Rightarrow K = \frac{1}{۲}\times ۲\times ۱۶ - ۴ = ۱۲J$

(ب) $W = \Delta K \Rightarrow ۸ - ۱۶ = \frac{1}{۲}\times ۴\times ۱ - \frac{1}{۲}\times ۴\times ۱ - ۴\times\Delta x$

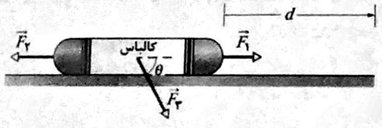
$-۸ = -۴\times\Delta x \Rightarrow \Delta x = ۲ \Rightarrow x = ۴$

(پ) $\Delta K = W = \int F(x)dx$

اگر انتگرال نیرو بزرگتر از صفر باشد، انرژی جنبشی افزایش می‌یابد. در بازهٔ ۰ تا ۱ این انتگرال مثبت است.

$K - K_۰ = \frac{1}{۲}\times ۴\times ۱ = ۲ \Rightarrow K = ۱۶ + ۲ = ۱۸J$

۶۷- شکل ۷-۴۷ کالباسی را نشان می‌دهد که روی کف افقی بدون اصطکاکی در حالی که سه نیرو بر آن وارد می‌شوند، به اندازهٔ مسافت $d = ۲۰/۰cm$ می‌لغزد. دو تا از این نیروها افقی‌اند و بزرگی آنها $F_1 = ۵/۰۰N$ و $F_2 = ۱/۰۰N$ است. سومین نیرو به بزرگی $F_3 = ۴/۰۰N$ در جهت رو به پایین و زاویهٔ $\theta = ۶۰/۰°$ قرار دارد. (الف) برای جابه‌جایی ۲۰/۰cm، کار خالص انجام شده روی کالباس توسط سه نیروی وارد شده، نیروی گرانشی وارد بر کالباس، و نیروی عمودی وارد بر کالباس چقدر است؟ (ب) اگر جرم کالباس ۲/۰kg و انرژی جنبشی اولیهٔ آن صفر باشد، تندی آن در پایان این جابه‌جایی چقدر است؟



شکل ۷-۴۷ مسئلهٔ ۶۷

حل: (الف) از تعریف کار داریم:

$W_1 = \vec{F_1}\cdot\vec{d} = F_1d = ۵(۰/۲) = ۱J$

$W_2 = \vec{F_2}\cdot\vec{d} = -F_2d = -(۱)(۰/۲) = -۰/۲J$

$W_3 = \vec{F_3}\cdot\vec{d} = F_3d\cos\theta = ۴\times ۰/۲\times\frac{1}{۲} = ۰/۴J$

کار نیروی وزن و نیروی عمودی صفر است

$W_{کل} = W_1 + W_2 + W_3 = ۱ - ۰/۲ + ۰/۴ = ۱/۲J$

(ب) $\Delta K = W \Rightarrow K = ۱/۲J$

$\frac{1}{۲}\times ۲v^2 = ۱/۲ \Rightarrow v = \sqrt{۱/۲} = ۱/۱m/s$

۶۸- کودک وحشت زده‌ای که توسط مادرش نگهداشته شده روی سرسرهٔ بدون اصطکاکی رو به پایین می‌لغزد. اگر بزرگی نیروی وارد از مادر به کودک ۱۰۰N و جهت آن رو به بالای شیب باشد، وقتی کودک ۱/۸m را رو به پایین بلغزد، انرژی جنبشی آن به میزان ۳۰J افزایش می‌یابد. (الف) نیروی گرانشی در طی ۱/۸m لغزش رو به پایین کودک، چقدر کار روی او انجام داده است؟ (ب) اگر کودک توسط مادرش نگهداشته نشده بود، پس از طی همان مسافت، انرژی جنبشی او به چه میزانی افزایش می‌یافت؟

حل: از قضیهٔ کار- انرژی جنبشی استفاده می‌کنیم.

$\Delta K = W_{کل} = W_F + W_g$

$W_F = \vec{F}\cdot\vec{d}$

$W_F = -۱۰۰\times ۱/۸ = -۱۸۰J$

$\Delta K - W_F = W_g \Rightarrow W_g = ۳۰ + ۱۸۰ = ۲۱۰J$

(ب) از آنجایی که کار نیروی وزن فقط به جابه‌جایی عمودی بستگی دارد، کار نیروی وزن مجدداً برابر ۲۱۰J می‌شود. بنابراین انرژی جنبشی ۲۱۰J افزایش می‌یابد.

۶۹- برای هل دادن رو به بالای صندوقی به جرم ۲۵/۰kg روی یک شیب بدون اصطکاک که با افق زاویهٔ ۲۵/۰° می‌سازد، کارگری نیروی ۲۰۹N را موازی با شیب بر آن وارد می‌کند. هنگامی که صندوق به اندازهٔ ۱/۵۰m بلغزد، چقدر کار روی صندوق توسط (الف) نیروی وارد شده از طرف کارگر، (ب) نیروی گرانشی وارد بر صندوق، و (پ) نیروی عمودی وارد شده از سطح شیبدار بر صندوق، انجام می‌گیرد؟ (ت) کار کل انجام شده روی صندوق چقدر است؟ SSM

حل: (الف) $W_1 = \vec{F}_1 \cdot \vec{d} = F_1 d = 209 \times 1.5 = 313.5\,J$

(ب)

$W_{mg} = m\vec{g}\cdot\vec{d} = -mgd\sin\theta = -25\times 9.8\times 1.5\times \sin(25°)$

$= -155.3\,J$

(پ) نیروی عمودی هیچ کاری انجام نمی‌دهد. $\vec{F}_N \cdot \vec{d} = 0$

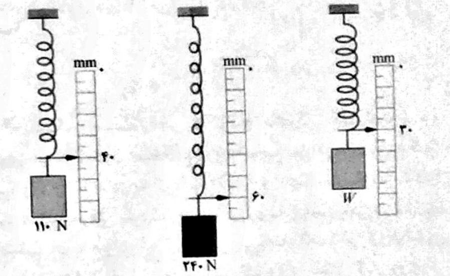
(ت) $W_{کل} = W_1 + W_g = 313.5 - 155.3 = 158.2\,J$

۷۰- اگر اتومبیلی به جرم ۱۲۰۰kg در بزرگراهی با تندی ۱۲۰km/h حرکت کند، انرژی جنبشی آن از دید شخصی که در کنار بزرگراه ایستاده، چقدر است؟

حل: (الف) $120\,km/h = 33.3\,m/s$

$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\times 1200 \times (33.3)^2 = 6.65\times 10^5\,J$

۷۱- فنری که عقربه‌ای به آن متصل است، در کنار خط‌کشی که برحسب میلی متر نشانه گذاری شده، آویزان است. همان گونه



شکل ۷-۴۸ مسئلهٔ ۷۱

که در شکل ۷-۴۸ نشان داده شده است، سه وزنهٔ مختلف را به نوبت از فنر می‌آویزیم. (الف) وقتی هیچ وزنه‌ای به فنر متصل نباشد، عقربه چه عددی را روی خط‌کش نشان می‌دهد؟ (ب) وزن W وزنهٔ سوم چقدر است؟ SSM

حل: (الف) x_0، طول اولیهٔ فنر است- از قانون هوک استفاده می‌کنیم:

$F = k\Delta x = k(x - x_0)$

$110 = k(40 - x_0)$

$240 = k(60 - x_0) \Rightarrow \frac{24}{11} = \frac{60 - x_0}{40 - x_0} \Rightarrow x_0 = 23\,mm$

(ب) $110 = k(40 - 23) \Rightarrow k = 6470\,N/m$

$W = F \Rightarrow W = 6470(30 - 23)\times 10^{-3} = 45.29\,N$

۷۲- ذره‌ای در امتداد مسیری مستقیم در حالی که نیروی $\vec{F} = (2N)\hat{i} - (4N)\hat{j}$ بر آن وارد می‌شود، جابه‌جایی $\vec{d} = (8m)\hat{i} + c\hat{j}$ را انجام می‌دهد. (نیروهای دیگری نیز بر ذره وارد می‌شوند.) اگر کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}$ روی ذره (الف) صفر، (ب) مثبت، و (ت) منفی باشد، مقدار c چقدر است؟

حل: (الف) $W = \vec{F}\cdot d = 0 \Rightarrow 2\times 8 - 4\times C = 0$

$\Rightarrow C = 4$

(ب) $W = \vec{F}\cdot d > 0 \Rightarrow 2\times 8 - 4C > 0$

$16 > 4C \Rightarrow C < 4$

(پ) $W = \vec{F}\cdot\vec{d} < 0 \Rightarrow C > 4$

۷۳- جرم اتاقک بالابری ۴۵۰۰kg است و اتاقک می‌تواند تا حداکثر ۱۸۰۰kg بار را حمل کند. اگر اتاقک با بیشینهٔ بار خود و با تندی ۳/۸۰m/s رو به بالا حرکت کند، چه توانی برای نیرو لازم است تا حرکت اتاقک در این تندی ثابت بماند؟ SSM

حل: (الف) طبق قانون نیوتون باید برآیند نیروها صفر باشد.

$F = mg = (1800 + 4500)\times 9.8 = 61740\,N$

$P = FV = 235\,kW$

۷۴- قالب یخی به جرم ۴۵kg روی شیب بدون اصطکاکی که طول آن ۱/۵m و بلندی آن ۰/۹۱m است رو به پایین می‌لغزد. کارگری یخ را موازی با شیب رو به بالا هل می‌دهد، به طوری که یخ با تندی ثابت رو به پایین حرکت کند. (الف) بزرگی نیروی کارگر را بیابید. چقدر کار روی قالب یخ توسط (ب) نیروی کارگر، (پ) نیروی گرانشی وارد بر قالب یخ، (ت) نیروی عمودی که از سطح شیبدار بر قالب یخ وارد می‌شود و (ث) نیروی برایند وارد بر قالب یخ، انجام شده است؟

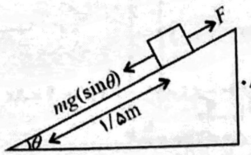
حل: (الف) $F = mg\sin\theta = 45\times 9.8\times \frac{0.91}{1.5} = 267.5\,N$

(ب) $W = \vec{F}\cdot\vec{d} = -mgd\sin\theta = -401.3\,J$

(پ) $W_g = m\vec{g}\cdot\vec{d} = mgd\sin\theta = 401.3\,J$

(ت) صفر

(ث) صفر



۷۵- نیروی $\vec{F}$ در جهت مثبت محور x بر جسمی که در امتداد این محور حرکت می‌کند وارد می‌شود. اگر بزرگی نیرو $F = 10e^{-x/2.0}N$ باشد، که در آن x برحسب متر است، کار انجام شده توسط $\vec{F}$ را هنگامی که جسم از $x = 0$ به $x = 2.0m$ می‌رود (الف) با رسم $F(x)$ و محاسبهٔ مساحت زیر منحنی و (ب) با انتگرال‌گیری به طور تحلیلی، بیابید.

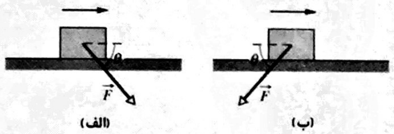
حل: (الف) با نقطه‌یابی حل می‌شود.

(ب)

$W = \int F(x)dx = \int_0^2 10e^{-x/2}dx = 20\int_0^2 \frac{1}{2}e^{-x/2}dx$

$W = -20e^{-x/2}\Big|_0^2 = 12.64\,J$

۷۶- در شکل ۷-۴۹ الف نیرویی به بزرگی ۲/۰N با زاویهٔ θ رو به پایین بر قطعه‌ای به جرم ۴/۰kg وارد شده است، به طوری که قطعه مسافت ۱/۰m را روی کف بدون اصطکاک به سمت راست می‌پیماید. اگر سرعت اولیهٔ قطعه (الف) صفر و (ب) ۱/۰m/s رو به سمت راست باشد، رابطه‌ای برای تندی v_f قطعه در پایان آن مسافت پیدا کنید. (پ) در شکل ۷-۴۹ ب قطعه با تندی اولیهٔ ۱/۰m/s رو به سمت راست حرکت می‌کند، ولی این بار جهت نیروی ۲/۰ نیوتونی به سمت چپ است. رابطه‌ای برای تندی v_f قطعه در پایان مسافت ۱/۰m پیدا کنید. (ت) هر سه رابطهٔ به دست آمده برای v_f را برحسب زاویهٔ رو به پایین θ در گسترهٔ $\theta = 0°$ تا $\theta = 90°$ رسم کنید و نمودارها را توضیح دهید.



شکل ۷-۴۹ مسئلهٔ ۷۶

حل: (الف) از قضیهٔ کار انرژی جنبشی استفاده می‌کنیم.

$W = \Delta K \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = Fd\cos\theta$

$v^2 = \frac{2F}{m}d\cos\theta = \frac{2\times 2}{4}1\times\cos\theta = \cos\theta$

$v = \sqrt{\cos\theta}$

(ب) $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = Fd\cos\theta$

$K_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 = 1J$

$v^2 = 1 + \cos\theta \Rightarrow v = \sqrt{1+\cos\theta}$

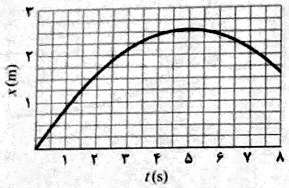
(پ) $W = \Delta K$

$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -Fd\cos\theta$

$v_0 = 1 \Rightarrow v^2 = 1 - \cos\theta \Rightarrow v = \sqrt{1-\cos\theta}$

(ت) رسم بر عهدهٔ دانشجو

۷۷- جعبهٔ غذایی به جرم ۲/۰kg، روی سطح بدون اصطکاکی در جهت مثبت محور x لغزانده می‌شود. باد پایایی با شروع در لحظهٔ $t = 0$ بر جعبه نیرویی در جهت منفی محور x وارد می‌کند. شکل ۷-۵۰ مکان x جعبه را برحسب تابعی از زمان t که در آن باد بر جعبه نیرو وارد می‌آورد، نشان می‌دهد. با استفاده از این نمودار، انرژی جنبشی جعبه را در (الف) $t = 1/0s$ و (ب) $t = 5/0s$ پیدا کنید. (پ) نیروی باد در بازهٔ زمانی $t = 1/0s$ تا $t = 5/0s$ چقدر کار روی جعبه انجام می‌دهد؟ SSM



شکل ۷-۵۰ مسئلهٔ ۷۷

حل: نیروی باد ثابت است. پس شتاب جعبه نیز ثابت است

$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$

با استفاده از نقطه‌یابی از روی نمودار، a و V_0 را می‌یابیم:

$t = 0$ $\quad x = 0$

$t = 1.5s$ $\quad x = 1.25m$

$t = 5s$ $\quad x = 2.5m$

$1.5 = \frac{1}{2}a(1.5)^2 + 1.5v_0$

$2.5 = \frac{1}{2}a(5)^2 + 5v_0$

$\Rightarrow a = -0.19\,m/s^2\,,\ v_0 = 0.98\,m/s$

(الف)

$v = at + v_0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow v = -0.19\times 1 + 0.98 = 0.79\,m/s$

$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\times 2\times(0.79)^2 = 0.624J$

(ب)

$v = at + v_0 \Rightarrow t = 5 \Rightarrow v = -0.19\times 5 + 0.98 = 0.03\,m/s$

$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\times 2(0.03)^2 = 9\times 10^{-4}\,J$

(پ) $W = \Delta K = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) = \frac{1}{2}\times 2((0.03)^2 - (0.79)^2)$

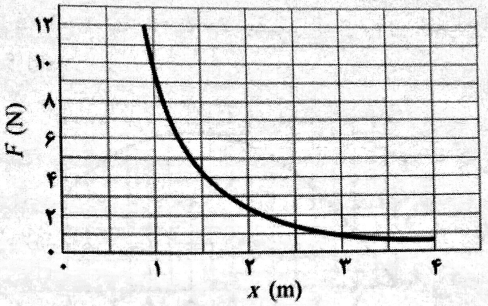
$= -0.623\,J$

۷۸- *انتگرال‌گیری عددی.* جعبهٔ نانی توسط نیرویی به بزرگی $F = \exp(-2x^2)$ که در آن x برحسب متر و F برحسب نیوتون است، از $x = 0/15m$ به $x = 1/20m$ حرکت داده می‌شود. این نیرو چقدر کار روی جعبه انجام داده است؟

حل: با انتگرال‌گیری عددی داریم:

$W = \int F(x)dx = \int_{0.15}^{1.2} e^{-2x^2}dx = 0.47J$

۷۹- وقتی ذره‌ای در امتداد محور x حرکت کند، نیرویی در جهت مثبت محور x بر آن وارد می‌شود. شکل ۷-۵۱، بزرگی F نیرو را برحسب مکان x ذره نشان می‌دهد. منحنی با رابطهٔ $F = a/x^2$ داده می‌شود که در آن $a = 9/0N\cdot m^2$ است. کار انجام شده توسط این نیرو روی ذره را هنگامی که ذره از $x = 3/0m$ به $x = 1/0m$ می‌رود با (الف) محاسبهٔ کار از روی منحنی و (ب) انتگرال‌گیری از تابع نیرو، به دست آورید.



شکل ۷-۵۱ مسئلهٔ ۷۹

حل: (الف) کار از روی منحنی برابر است با سطح زیر نمودار داده شده در بازهٔ $۱ < x < ۳$. این سطح برابر با انتگرال‌گیری از نیرو در این بازه است.

(ب)
$$W = \int F(x)dx = \int_۱^۳ \frac{a}{x^۲}dx = ۹\int_۱^۳ \frac{dx}{x^۲}$$
$$W = -\frac{۹}{x}\Big|_۱^۳ = -۹\left(\frac{۱}{۳} - ۱\right) = ۶\,\mathrm{J}$$

۸۰- یک جعبهٔ CD در حالی که بر آن نیروی $\vec{F}_a$ وارد شده است، روی کفی در جهت مثبت محور x می‌لغزد. نیرو در جهت محور x است و دارای مؤلفهٔ x برابر $F_{ax} = ۹x - ۳x^۲$ است که در آن x برحسب متر و F_{ax} برحسب نیوتون است. جعبه از حالت سکون در مکان $x = ۰$ شروع به لغزش کرده و تا وضعیت سکون مجدد حرکت می‌کند. (الف) کار انجام شده توسط $\vec{F}_a$ روی جعبه را برحسب تابعی از x رسم کنید. (ب) در چه مکانی این کار بیشینه است؟ و (پ) این مقدار بیشینه چقدر است؟ (ت) در چه مکانی کار به مقدار صفر کاهش می‌یابد؟ (ث) جعبه در چه مکانی دوباره ساکن می‌شود؟

حل: (الف)
$$W = \int F(x)dx = \int_۰^x (۹x - ۳x^۲)\,dx = \frac{۹}{۲}x^۲ - x^۳$$

(ب)
$$\frac{dW}{dx} = ۰ \Rightarrow ۹x - ۳x^۲ = ۰ \qquad x = ۰ \qquad x = ۳$$

(پ)
$$W\big|_{x=۳} = \frac{۹}{۲}\times ۹ - ۲۷ = ۱۳/۵\,\mathrm{J}$$

$$W = ۰ \Rightarrow \frac{۹}{۲}x^۲ - x^۳ = ۰ \Rightarrow x\left(\frac{۹}{۲} - x\right) = ۰$$

(ت) $x = ۴/۵$ ، $x = ۰$

(ث) در جایی که $K = ۰$ باشد، ذره ساکن است.

$$K = W = ۰ \Rightarrow x = ۴/۵$$